Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

4. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 15. November, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Integralkurven auf der S^2). (3 Punkte)

Man zeige, dass durch

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

ein glattes Vektorfeld auf S^2 gegeben ist. Bestimme die Integralkurven von X.

Aufgabe 2 (Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten). (4 Punkte)

Es seien M eine Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $X \in C^\infty(TM)$ ein glattes Vektorfeld, so daß für alle $p \in N$ gilt $X(p) \in T_pN$. Man zeige:

1. $X\big|_N$ ist ein glattes Vektorfeld auf N.
2. Sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Integralkurve von X mit $\gamma(0) \in N$. Dann ist $\operatorname{Bild}\gamma \subset N$ und γ Integralkurve von $X\big|_N$.
3. Jedes glatte Vektorfeld Y auf N ist lokal die Einschränkung eines glatten Vektorfeldes X auf M, d.h. zu jedem Punkt $p \in N$ existiert eine offene Umgebung U von p in M und ein Vektorfeld $X \in C^\infty(TU)$ mit $Y\big|_{U\cap N} = X\big|_{U\cap N}$.

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Lie-Klammer). (4 Punkte)

Beweise Lemma 1.38!

Aufgabe 4 (Erhaltung der Lie-Klammer). (5 Punkte)

Es seien M, N Mannigfaltigkeiten und $\phi\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zwei Vektorfelder $X \in C^\infty(M)$, $Y \in C^\infty(N)$ heißen ϕ-verwandt, falls für alle $p \in M$ gilt:

$$Y(\phi(p)) = (d\phi)_p\big(X(p)\big).$$

Für $i = 1, 2$ seien $X_i \in C^\infty(M)$ und $Y_i \in C^\infty(N)$ jeweils ϕ-verwandte Vektorfelder. Zeige, dass $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ ebenfalls ϕ-verwandt sind.