Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

2. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 3. November (da Montag Feiertag), in der Vorlesungspause.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^2_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 > 0 \right\}$ betrachte man folgende zwei Karten:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2_+ & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2_+ \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2_+ & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}_+ \times (-\pi,\, \pi) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\, \arctan \frac{x_2}{x_1}\right) \end{array}$$

(i) Man berechne für beide Karten die Standardbasis des Tangentialraums an jedem Punkt p.

(ii) Wo stimmen beide Basen (als nicht geordnete Basen) überein ?

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Zeige, daß die invertierbaren linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in sich selbst eine Mannigfaltigkeit bilden und bestimme ihre Dimension!

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Zeige, daß T_pS^2 auf kanonische Weise als Vektorraum zu $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle x, p \rangle = 0 \right\}$ isomorph ist!

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei $f\colon\ S^2 \to \mathbb{RP}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = [x^2 + 2y^2 + z^2 : xy : y^2 : z^2].$$

Zeige, daß für $y \neq 0$ und $z \neq 0$ die Tangentialabbildung injektiv ist!