Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

12. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 24. Januar, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Oberfläche einer Rotationsfläche). (5 Punkte)

Sei $r : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ eine beschränkte glatte Funktion mit beschränkter Ableitung und

$$X := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = r(z)^2,\, z \in (0,1)\right\}$$

die zugehörige Rotationsfläche. Diese bildet eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dessen Metrik vom $\mathbb{R}^3$ induziert wird. Beschreibe das Integral der Volumenform in Abhängigkeit von r.

Aufgabe 2 (Integralsatz von Gauß (4.16)). (5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Integrationsgebiet, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{G} \subset U$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Für $y \in \partial_r G$ sei $\nu(y)$ der äußere Einheitsnormalenvektor. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial_r G} \langle F(y), \nu(y)\rangle d\mu_{\partial_r G}(y)$$

Zeige dies mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Hinweis: Verwende dazu die $(n-1)$-Form

$$\sum_i (-1)^{i+1} F^i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei F^i die Komponenten von F sind.

Aufgabe 3 (Überlagerung). (4 Punkte)

Seien M und N kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \to N$ eine n-fache Überlagerung. Hat N eine Volumenform α, so erhält man auf M durch $\pi^*(\alpha)$ ebenfalls eine n-Form. Beweise, dass

$$\int_M \pi^*(\alpha) = n \cdot \int_N \alpha.$$

Aufgabe 4 (Fundamentalgruppe). (5 Punkte)

Sei $\pi_1^g(M;p)$ die glatte Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit M zum Punkt $p \in M$, d.h. die Menge der stückweise glatten Kurven, die in p anfangen und enden, modulo entsprechender Homotopien (d.h. solcher, die stückweise eine glatte Homotopie von glatten Kurven sind). Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1^g(M,p) \times H^1(M;\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (\gamma, \alpha) &\mapsto \int_\gamma \alpha \end{aligned}$$

wohldefiniert ist.