Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

11. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 17. Januar, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Orientierung — verschiedene Definitionen). (5 Punkte)

Zeige, dass folgende drei Bedingungen für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M äquivalent sind:

1. M ist orientierbar.
2. Es existiert ein Atlas $\mathcal{A} = \big\{(U_i, \phi_i) \;:\; i \in I\big\}$ von M , so dass für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt:
$$\det\left(d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})\big|_{\phi_i(x)}\right) > 0$$
für $x \in U_i \cap U_j$.
3. Es existiert ein $\omega \in \Lambda^n(M)$, so dass $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.

Aufgabe 2 (Antipoden-Abbildung). (3 Punkte)

Zeige, dass die Abbildung $S^n \to S^n$, die durch $x \mapsto -x$ (in Koordinaten des $\mathbb{R}^{n+1}$) gegeben ist, den Grad $(-1)^{n+1}$ hat.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die *Standardvolumenform*

$$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$$

die n-te Kohomologie der S^n erzeugt.

Aufgabe 3 (Normalenvektorfeld). (4 Punkte)

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, für die eine Immersion in den $\mathbb{R}^{n+1}$ existiert. Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es für M in $\mathbb{R}^{n+1}$ ein nichtverschwindendes Normalenvektorfeld gibt.

Aufgabe 4 (Der projektive Raum). (4 Punkte)

Beweise, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist.