Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

10. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 10. Januar, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Satz von Künneth). (5 Punkte)

Sei $M = B \times F$ ein Produkt von glatten kompakten Mannigfaltigkeiten B und F. Seien π_B und π_F die Projektionen von M auf die zwei Faktoren. Die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \Omega(B) \times \Omega(F) &\to \Omega(M) \\ (\alpha, \beta) \quad &\mapsto \pi_B^*(\alpha) \wedge \pi_F^*(\beta) \end{aligned}$$

ist eine Kokettenabbildung und induziert einen Homomorphismus

$$f_* : H(B) \otimes H(F) \to H(B \times F) = H(M).$$

Zeige, dass f_* ein Isomorphismus ist, d.h.

$$H^p(B \times F) \cong \bigoplus_{j=1}^{p} H^j(B) \otimes H^{p-j}(F).$$

Hinweis: Benutze Induktion nach der Anzahl der offenen Mengen einer guten Überdeckung von B. Wende die Mayer-Vietoris-Sequenz und das Fünf-Lemma für den Beweis des Induktionssschrittes an.

Aufgabe 2 (Zusammenhängende Summe). (6 Punkte)

Seien M_1, M_2 glatte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Dimension n. Seien p_1, p_2 Punkte mit $p_i \in M_i$ und einer Kartenumgebung W_i, deren Kartenabbildung ϕ_i bijektiv auf die offene Kreisscheibe $B_2(0)$ abbildet Wir definieren nun

$$M_1 \# M_2 = \left(M_1 \backslash \phi_1^{-1}\left(\overline{B_1(0)}\right)\right) \dot{\cup} \left(M_2 \backslash \phi_2^{-1}\left(\overline{B_1(0)}\right)\right) \Big/ \sim,$$

wobei $\sim$ auf W_1 bzw. W_2 definiert ist als $x_1 \sim \phi_1^{-1} \circ \mu \circ \phi_2(x_2)$; die Abbildung μ ist in Polarkoordinaten auf $B_2(0) \backslash \overline{B_1(0)}$ gegeben als $(r, \alpha) \mapsto (3 - r, \alpha)$.

1. Zeige, daß $M_1 \# M_2$ eine eindeutige glatte Struktur trägt, wenn man fordert, daß die Inklusionen $\left(M_i \backslash \phi_i^{-1}\left(\overline{B_1(0)}\right)\right)$ glatte Einbettungen sind.

2. Beweise, daß $H^i\big(M_1\#M_2\big) \cong H^i(M_1) \oplus H^i(M_2)$ für $0 < i < n$, wenn wir folgendes annehmen: Die n-te Kohomologie von M_1, M_2 und $M_1\#M_2$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$; nimmt man einen abgeschlossenen Ball heraus, so verschwindet die jeweilige n-te Kohomologie (Wir werden später in der Vorlesung sehen, daß diese Annahme für kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten immer zutrifft).

3. Zeige, daß sich durch die #-Operation aus 2-dimensionalen Tori unendlich viele nicht zueinander diffeomorphe Mannigfaltigkeiten erzeugen lassen.

Aufgabe 3 (Hyperfläche). (5 Punkte)

Sei M zusammenhängend mit $H^1(M) = 0$ und $N \subset M$ eine abgeschlossene zusammenhängende Hyperfläche, d.h. $\dim N = \dim M - 1$.

1. Beweise: $M \setminus N$ besitzt genau zwei Wegzusammenhangskommenten, deren gemeinsamer Rand N ist. Sie dürfen benutzen, dass N eine sogenannte Tubenumgebung T besitzt: $T \supset N$ ist offen und es gibt einen Diffeomorphismus $\tau\colon T \to N \times (-1, 1)$ mit $\tau(x) = (x, 0)$ für $x \in N$.

2. Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die Bedingung $H^1(M) = 0$ notwendig ist.

Aufgabe 4 (Der punktierte Raum). (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ der euklidische Raum ohne k Punkte. Berechne seine Kohomologie.