Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier WS 2010/11

1. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 25. Oktober in der Vorlesungspause.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der n-dimensionale projektive Raum $P^n_{\mathbb{K}}$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Zeige, dass sich die stereographische Projektion

$$\begin{array}{rcl} S^2 \setminus \{N = (0,0,1)\} & \to & \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1:0]\} \\ (x,y,t) & \mapsto & [\frac{x+iy}{1-t} : 1] \end{array}$$

zu einem Diffeomorphismus $S^2 \to \mathbb{CP}^1$ fortsetzt.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Es sei $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis und

$$\Gamma := \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_n = \left\{ \sum_{j=1}^n m_j v_j : m_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, ..., n \right\}.$$

Dann ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter vom Rang n. Zeige, dass der Torus $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ein kompakte n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist, und gib einen Diffeomorphismus

$$\mathbb{R}^n/\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1.$$

an.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Es seien X, Y, Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie die Kettenregel für die Tangentialabbildung

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$