

SATZ VON PETER-WEYL

Seminar im Sommersemester 2003 zur Vorlesung Globale Analysis II bei Prof. Werner Müller

Jens Putzka

Bonn, den 25. Juli 2003

1 Das Peter-Weyl-Theorem

1.1 Darstellung von Gruppen

1.1.1 Grundlagen

Definition .1 (Topologische Gruppe). Eine topologische Gruppe G ist topologischer Raum mit einer Gruppenstruktur, für die $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ stetig dieser operiert. Eine topologische Gruppe heißt kompakt, wenn sie als topologischer (Hausdorff-)Raum kompakt ist. Eine Gruppe G heißt lokalkompakt, wenn sie ein Hausdorffraum ist, in dem zu jedem $g \in G$ eine kompakte Umgebung existiert.

Definition .2 (Darstellung). Eine endlichdimensionale Darstellung einer topologischen Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) \tag{1}$$

mit einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V , stetig meint sowohl die Gruppenaktion auf V als auch die Stetigkeit von Φ zwischen den beiden topologischen Räumen. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann heißt U ein G -invarianter Unterraum, wenn

$$\Phi(g)(U) \subseteq U \quad \forall g \in G \tag{2}$$

V heißt irreduzibel, wenn die einzigen invarianten Unterräumen 0 und V sind.

1.1.2 Integration auf topologischen Gruppen

Nun ist es notwendig, sich mit der Integration auf Gruppen zu beschäftigen, hierzu

Definition .3 (Haar'sches Maß). Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe, die Hausdorff'sch sein möge. Ein (Links-)Haar'sches Maß $\mu_l \neq 0$ ist ein linksinvariantes borelreguläres Maß¹ auf G ,

¹Ein borelreguläres Maß ist ein positives Maß μ auf einem topologischen Raum X , so dass alle Borelmengen messbar sind und für $A \subset X$ ist

$$\mu(A) = \inf_{B \supset A, B \text{ Borelmenge}} \mu B$$

das endlich auf kompakten Mengen ist. Ist die Gruppe G abelsch oder kompakt, so ist ein Links-Haarsches Maß auch ein Rechts-Haar'sches Maß². Es gilt $\mu_l(E) = \mu_r(E^{-1})$ mit $E \subset G$ und $E^{-1} = \{g^{-1} : g \in E\}$. In der Literatur heißt bisweilen auch ein Maß, das Links-Haarsches Maß und (!) Rechts-Haar'sches Maß ist Haar'sches Maß.

Bemerkung .1. Wählt man als σ -Algebra, die Algebra A , die von allen kompakten Teilmengen von G erzeugt wird, so erhält man einen Maßraum, d.h. wir können z.B. den Satz von Fubini anwenden.

Bemerkung .2. Existiert ein Rechts- und ein Links-Haar'sches Maß, so unterscheiden sie sich um eine multiplikative Konstante, die man auf 1 kann.

Bemerkung .3. Ist G eine Lie-Gruppe so existiert auf G ein (Links-)Haar'sches Maß. Ist G kompakt so existiert ein beidseitiges Haar'sches Maß.

Definition .4 (Unitäre Darstellung). Eine Darstellung Φ einer Gruppe G auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V heißt unitär, wenn ein hermitesches Inneres Produkt auf V existiert, so dass bezüglich diesem $\Phi(g)\Phi(g)^* = 1$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung .4. Für eine unitäre Darstellung Φ ist das orthogonale Komplement U^\perp eines invarianten Unterraums wieder invariant, denn man rechnet leicht nach, dass

$$\langle \Phi(g)u^\perp, u \rangle = \langle u^\perp, \Phi(g)^{-1}u \rangle = 0 \quad \text{für } u^\perp \in U^\perp, u \in U \quad (3)$$

Lemma .1. Wenn $\Phi : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ eine Darstellung einer kompakten Gruppe G , $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, dann gibt es ein hermite'sches inneres Produkt auf V , so dass Φ unitär ist.

Beweis. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges inneres Produkt über V , dann erfüllt

$$(u, v) = \int_G \langle \Phi(x)u, \Phi(x)v \rangle d\mu(x) \quad (4)$$

die geforderten Eigenschaften. qed

Lemma .2. Wenn Φ eine Darstellung von G auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist, dann ist Φ die direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Damit ist $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, wobei jedes V_i ein G -invarianter Unterraum ist, auf dem Φ irreduzibel operiert.

Beweis. Betrachte die Hermitesche Form (\cdot, \cdot) aus Lemma .1. Wir wählen einen von 0 verschiedenen invarianten Unterraum $U \subset V$, dann wissen wir (Bemerkung .4), dass U^\perp invariant ist, auf diesen Raum wenden wir das Argument erneut an und erhalten so die gesuchte Zerlegung. qed

Lemma .3. (Schur) Seien Φ und Φ' irreduzible, endlichdimensionale Darstellungen von G auf Vektorräumen V bzw. V' . Ist $L : V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung für die gilt $\Phi'(g)L = L\Phi(g)$ für alle $g \in G$, so ist L injektiv oder identisch 0.

Lemma .4. Sei Φ eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung von G auf V . Wenn $\Phi(g)L = L\Phi(g)$ für alle $g \in G$ gilt, so ist L ein Skalar

Beispiel .1. Ist G eine abelsche Gruppe, so folgt aus dem vorherigen Lemma mit $L = \Phi(g_0)$, dass jede endliche irreduzible Darstellung von G 1-dimensional ist. Für $G = S^1 = \{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$ kann man die 1-dimensionalen Darstellungen durch $n \in \mathbb{Z}$ parametrisieren durch $g = e^{i\varphi} \mapsto (x \mapsto xe^{in\varphi})$

1.2 Satz von Peter-Weyl

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass sich die Betrachtung von kompakten Lie-Gruppen auf die Betrachtung komplexer Matrizen Gruppen beschränken lässt.

²Sie müssen nicht notwendigerweise gleich sein

1.2.1 Satz von Peter-Weyl für kompakte Gruppen

Lemma .5. Wenn G eine kompakte Gruppe und $h \in L^2(G)$, dann ist $y \mapsto (x \mapsto h(y^{-1}x))$ eine stetige Funktion von G nach $L^2(G)$.

Beweis. Sei $L_y(x) = y^{-1}x$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ziel ist es eine offene Umgebung $U \subset G$ der 1 zu konstruieren, so dass $\|h \circ L_{y_1} - h \circ L_{y_2}\|_2 < \varepsilon$, wenn $y_1 y_2^{-1} \in U$. Sei dazu $h \in L^2(G)$ gegeben. Wir finden eine stetige Funktion c , so dass $\|h - c\|_2 < \varepsilon/3$. (Diese Dichtheitseigenschaft ist gültig für alle borelreguläre Maße nicht nur die invarianten). Die Funktion c ist stetig auf G , also ist sie gleichmäßig stetig. Daher können wir eine offene Umgebung U der 1 finden, so dass für alle $x \in G$

$$|c \circ L_{y_1} x - c \circ L_{y_2} x| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5)$$

,wenn $y_1^{-1} y_2 \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|h \circ L_{y_1} - h \circ L_{y_2}\|_2 &\leq \|h \circ L_{y_1} - c \circ L_{y_1}\|_2 \\ &\quad + \|c \circ L_{y_1} - c \circ L_{y_2}\|_2 + \|c \circ L_{y_2} - h \circ L_{y_2}\|_2 \\ &= 2\|h - c\|_2 + \|c \circ L_{y_1} - c \circ L_{y_2}\|_2 \\ &\leq 2\|h - c\|_2 + \sup_{x \in G} |c \circ L_{y_1} - c \circ L_{y_2}| \\ &< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

qed

Lemma .6. Sei G eine kompakte Gruppe und $h \in L^2(G)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann endlich viele $y_i \in G$ und Borelmengen $E_i \subseteq G$, so dass die E_i G disjunkt überdecken und es gilt:

$$\|h \circ L_{y_i} - h \circ L_{y_j}\|_2 < \varepsilon \quad \forall i, j \in E_i \quad (7)$$

Mit $L_y(x) = y^{-1}x$.

Beweis. Nach Lemma .5 wählen wir eine offene Umgebung U der 1, so dass $\|h(gx) - h(x)\|_{2,x} < \varepsilon$ für $g \in U$. Für jedes $z_0 \in G$ ist $\|h(gz_0x) - h(z_0x)\|_{2,x} < \varepsilon$, wenn $g \in U$. Die Menge Uz_0 ist eine offene Umgebung von z_0 und solche Mengen überdecken G , wenn wir z_0 variieren. Da G kompakt ist, können wir zu dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung Uz_1, \dots, Uz_n wählen. Wir setzen $U_i = Uz_i$. Weiter definieren wir nun

$$F_j = U_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i \quad (8)$$

Dann folgt das Lemma mit $y_i = z_i^{-1}$ und $E_i = F_i^{-1}$.

qed

Lemma .7. Sei G eine kompakte Gruppe, $f \in L^1(G)$ und $h \in L^2(G)$. Wir setzen $F(x) = \int_G f(y)h(y^{-1}x) dx$ die Faltung von f mit h . Dann ist F der Grenzwert eine Folge von Funktionen in $L^2(G)$, welche gegeben sind durch endliche Linearkombinationen von Linkstranslaten von h .

Beweis. Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen y_i und E_i wie in Lemma .6 und setze $c_i = \int_{E_i} f(y) dy$. Dann

$$\begin{aligned} \left\| \int_G f(y)h(y^{-1}x) dy - \sum_i c_i h(y_i^{-1}x) \right\|_{2,x} &\leq \left\| \sum_i \int_{E_i} |f(y)| |h(y^{-1}x) - h(y_i^{-1}x)| dy \right\|_{2,x} \\ &\leq \sum_i \int_{E_i} |f(y)| \|h(y^{-1}x) - h(y_i^{-1}x)\|_{2,x} dy \\ &\leq \sum_i \int_{E_i} |f(y)| \varepsilon dy = \varepsilon \|f\|_1 \end{aligned} \quad (9)$$

qed

Definition .5 (Matrixkoeffizienten, Charakter). Ein Matrixkoeffizient einer Darstellung Φ ist eine Funktion auf G der Form $(\Phi(x)u, v)$. Als Charakter von G bezeichnet man

$$\chi_\Phi(x) = \text{Tr}\Phi(x) = \sum_i (\Phi(x)u_i, u_i) \quad (10)$$

wobei die (u_i) eine Orthonormalbasis des Vektorraumes bilden.

Bemerkung .5. Charaktere spielen für uns im Moment keine Rolle, eine genau Betrachtung von ihnen (z.B. Orthogonalitätsrelationen) liefern uns Auskünfte über irreduzible Darstellungen und z.B. finden Charaktere von Symmetriegruppen Anwendung etwa in der Strukturtheorie chemischer Bindungen in organischen Molekülen.

Theorem .1 (Peter-Weyl Theorem). Wenn G eine kompakte Gruppe ist, dann liegt die lineare Hülle der Matrixkoeffizienten von allen endlich dimensional³ irreduziblen unitären Darstellungen von G dicht in $L^2(G)$.

Bemerkung .6. Wir werden noch sehen, dass man nicht alle Darstellungen benötigt. Man kann diese Zerlegung auch als

$$L^2(G) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} V_\rho \otimes V_\rho^* = \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} \dim_{\mathbb{C}}(V_\rho) V_\rho \quad (11)$$

schreiben, wobei $V_\rho \otimes V_\rho^*$ unabhängig von der Äquivalenzklasse der Darstellung sind (Die Gruppenaktion ist trivial auf der zweiten Komponente). Mit \widehat{G} bezeichnet man die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen. In dieser Zerlegung kommt jede Darstellung so oft vor wie ihre Dimension ist.

Beweis. Wenn $h(x) = (\Phi(x)u, v)$ ein Matrixkoeffizient ist, dann sind die folgenden Funktionen von x ebenfalls Matrixkoeffizienten der selben Darstellung:

$$\overline{h(x^{-1})} = (\Phi(x)v, u) \quad (12)$$

$$h(gx) = (\Phi(x)u, \Phi(g^{-1})v) \quad (13)$$

$$h(xg) = (\Phi(x)\Phi(g)u, v) \quad (14)$$

Der Abschluss U in $L^2(G)$ der linearen Hülle aller Matrixkoeffizienten aller endlich dimensional irreduziblen unitären Darstellungen ist stabil unter den Gruppenaktionen $h(x) \mapsto \overline{h(x^{-1})}$, sowie unter Links- und Rechtstranslation.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $U \neq L^2(G)$. Dann gilt $U^\perp \neq 0$ und U^\perp ist abgeschlossen unter den gleichen Gruppenaktionen.

Wir zeigen zunächst, dass es eine von Null verschiedene stetige Funktion in U^\perp gibt. Sei daher $H \neq 0$ in U^\perp . Für jede offene Umgebung N von 1 definieren wir

$$F_N(x) = \frac{1}{|N|} \int_G \chi_N(y) H(y^{-1}x) dy \quad (15)$$

Wobei χ_N die charakteristische Funktion auf N und $|N| = \int_G \chi_N(g) dg$ das Haarsche Maß von N . Wir verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Tatsache, dass $\chi_N, H \in L^2(G)$ um zu zeigen, dass F_N stetig ist. Wenn N auf $\{1\}$ schrumpft, konvergieren die Funktionen F_N gegen H in $L^2(G)$, daher ist ein Repräsentant von F_N für ein N nicht Null.

Schließlich ist jede Linearkombination von Links-Translaten von H in U^\perp enthalten, und daher ist $F_N \in U^\perp$ nach Lemma .7. Somit enthält U^\perp von Null verschiedene stetige Funktionen. Durch Translation und Skalarmultiplikation können wir die Funktion so abändern, dass wir ein stetiges F_1 in U^\perp mit $F_1(1) \neq 0, \in \mathbb{R}$. Setze

³Man kann zeigen, dass hier alle irreduziblen Darstellungen endlich sind

$$F_2(x) = \int_G F_1(yxy^{-1})dy \quad (16)$$

Dann ist F_2 stetig und U^\perp und es gilt $F_2(yxy^{-1}) = F_2(x)$ für alle $g \in G$ und $F_2(1) = F_1(1) \neq 0, \in \mathbb{R}$. Setze schließlich

$$F(x) = F_2(x) + \overline{F_2(x^{-1})} \quad (17)$$

F ist dann stetig, $F \in U^\perp$ und es gilt $F(gxg^{-1}) = F(x)$ für alle $g \in G$. Weiter gilt $F(1) = 2F_2(1) \neq 0, \in \mathbb{R}$, sowie $F(x) = \overline{F(x^{-1})}$. Insbesondere $F \neq 0, \in L^2(G)$. Wir bilden nun die Funktion $k(x, y) = F(x^{-1}y)$ und definieren dadurch den Integraloperator

$$Tf(x) = \int_G k(x, y)f(y) dy \quad f \in L^2(G) \quad (18)$$

Dann gilt $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ und $\int_{G \times G} |k(x, y)|^2 dx dy < \infty$ und daher ist $T : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ ein Hilbert-Schmidt Operator⁴. Zudem ist $T \neq 0$ da $F \neq 0$. Nach dem Spektralsatz⁵ ist solch ein Operator reelle von Null verschiedene Eigenwerte λ und die dazu gehörenden Eigenräume $V_\lambda \subseteq L^2(G)$ sind endlichdimensional.

Nun müssen wir zeigen, dass der Unterraum V_λ invariant unter Linkstranslation durch g . Dies schreiben wir als $(L(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$. Aus $f \in V_\lambda$ folgt

$$\begin{aligned} TL(g)f(x) &= \int_G F(x^{-1}y) f(g^{-1}y) dy = \int_G F(x^{-1}gy) f(y) dy \\ &= Tf(g^{-1}x) = \lambda L(g)f(x) \end{aligned} \quad (19)$$

Nach Lemma .5 ist $g \mapsto L(g)f$ und daher ist L eine Darstellung von G in den endlich dimensionalen Raum V_λ . Nach Lemma .2 gibt es invarianten, irreduziblen Unterraum W_λ mit $0 \neq W_\lambda \subset V_\lambda$. Sei f_1, \dots, f_n eine Orthonormalbasis von W_λ . Die Matrixkoeffizienten für W_λ sind

$$h_{ij}(x) = (L(x)f_j, f_i) = \int_G f_j(x^{-1}y) \overline{f_i(y)} dy \quad (20)$$

Diese sind nach Definition in U enthalten. Da $F \in U^\perp$ erhalten wir

⁴Ein Hilbert-Schmidt-Operator ist ein (Fredholm)Operator mit symmetrischem Integralkern

⁵auch Hilbert-Schmidt-Theorem: Ist K ein kompakter, selbstadjungierter Operator, dann gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen $\{\psi_n\}$ mit $K\psi_n = \lambda_n$ und $\lambda_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_G F(x) \overline{h_{ii}(x)} \\
&= \int_G \int_G F(x) \overline{f_i(x^{-1}y)} f_i(y) dy dx \\
&= \int_G \int_G F(x) \overline{f_i(x^{-1}y)} f_i(y) dx dy \\
&= \int_G \int_G F(yx^{-1}) \overline{f_i(x)} f_i(y) dx dy & F(gxg^{-1}) = F(x) \\
&= \int_G \underbrace{\left(\int_G F(x^{-1}y) f_i(y) dy \right)}_{=Tf_i(x)} \overline{f_i(x)} dx \\
&= \int_G (Tf_i(x)) \overline{f_i(x)} dx \\
&= \lambda \int_G |f_i(x)|^2 dx \quad \lambda \neq 0
\end{aligned} \tag{21}$$

für alle i , im Widerspruch zur Annahme $W_\lambda \neq 0$. Daraus schließen wir $U^\perp = 0$ und damit $U = L^2(G)$. qed

Beispiel .2. Wir haben schon gesehen, dass die irreduziblen Darstellungen von $S^1 = \{e^{i\varphi}\}$ 1-dimensional sind. Die Matrixkoeffizienten sind damit lediglich $e^{in\varphi}$. Nach dem Peter-Weil Theorem wissen wir, dass es eine endliche Linearkombination von diesen Matrixkoeffizienten gibt, die dicht in $L^2(S^1)$. Dies ist damit gleichbedeutend, dass $\{e^{in\varphi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(S^1)$ ist. Die Aussage der Dichtheit ist nichts anderes als die Fourierzerlegung einer Funktion. Das nächste Lemma verallgemeinert diese Aussage noch einmal.

Lemma .8. *Wenn $\{\Phi^{(\alpha)}\}$ eine maximale Menge von paarweise nicht äquivalenten, endlich dimensionalen, irreduziblen, unitären Darstellungen einer kompakten Gruppe G und wenn $\{(d^{(\alpha)})^{\frac{1}{2}} \Phi_{ij}^{(\alpha)}(x)\}_{i,j,\alpha}$ die korrespondierende orthonormale Menge von Matrixkoeffizienten, dann ist $\{(d^{(\alpha)})^{\frac{1}{2}} \Phi_{ij}^{(\alpha)}(x)\}_{i,j,\alpha}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(G)$.*

Beweis. Die lineare Hülle der Funktionen im Lemma .8 ist die in Theorem .1 aufgetretene lineare Hülle, denn es reicht je Isomorphieklasse einen Repräsentanten zu wählen. Dann folgt das Lemma aus Theorem .1, wenn man bedenkt, dass verschiedene irreduzible Darstellungen orthogonal sind und damit in $L^2(G)$, einem Hilbertraum, linear unabhängig sind. qed

1.2.2 Satz von Peter-Weyl für kompakte Lie-Gruppen

Nun wollen wir uns auf Liegruppen spezialisieren. Man kann sich überlegen

Lemma .9. *Jeder stetige Homomorphismus zwischen zwei Lie-Gruppen ist glatt.*

Theorem .2 (Satz von Peter-Weyl für kompakte Lie-Gruppen). *Jede kompakte Lie-Gruppe G besitzt eine injektive endlich dimensionale Darstellung und ist daher isomorph zu einer abgeschlossenen linearen Gruppe.*

Beweis. Dieses Theorem ist eine direkte Folgerung aus Theorem .1. Aus Theorem .1 folgt für alle $x \neq 1$ in G , dass es eine endlichdimensionale Darstellung Φ_x von G gibt, so dass $\Phi_x(x) \neq 1$.

Wenn die Zusammenhangskomponente G_0 der 1 nicht $\{1\}$ ist, wähle ein $x_1 \neq 1$ aus G_0 . Dann ist $G_1 = \ker \Phi_{x_1}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und die Zusammenhangskomponente der 1 ist eine echte Untergruppe von G_0 .

Wenn $(G_1)_0 \neq \{1\}$ ist, wähle ein $x_2 \neq 1$ in $(G_1)_0$. Dann ist $G_2 = \ker(\Phi_{x_1} \oplus \Phi_{x_2})$ eine abgeschlossene Untergruppe von G_1 und die zugehörige Zusammenhangskomponente der 1 ist eine echte

Zusammenhangskomponente $(G_1)_0$. Verfahren wir auf diese Weise fort und verwenden die Endlichdimensionalität von G , so sehen wir dass wir eine endlichdimensionale Darstellung Φ_0 von G finden können, so dass $\dim \ker \Phi_0 = 0$. Dann ist $\ker \Phi_0$, da es eine 0-dimensionale, abgeschlossene Untergruppe in der kompakten Lie-Gruppe G ist, also eine diskrete Menge, die auf Grund der Kompaktheit sogar endlich. Sagen wir $\ker \Phi_0 = \{y_1, \dots, y_n\}$, dann ist

$$\Phi = \Phi_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^n \Phi_{y_j} \tag{22}$$

eine injektive endlichdimensionale Darstellung von G .

qed