Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen über Lie-Gruppen und Lie-Algebren **2**

2 Klassifikation komplexer, halbeinfacher Lie-Algebren **4**

3 Das Haarsche Mass **8**

4 Darstellungen von Lie-Gruppen **8**

5 Darstellungen von Lie-Algebren **10**

1 Grundlagen über Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Abstract: Bei Lie-Gruppen handelt es sich um Mannigfaltigkeiten, die zusätzlich mit einer Gruppenstruktur versehen sind, welche mit der Mannigfaltigkeitstruktur verträglich ist. Einer Lie-Gruppe G wird eine Lie-Algebra g von Vektorfeldern zugeordnet, die sich als isomorph zum Tangentialraum T_eG am neutralen Element der Gruppe herausstellt. Ein Studium der Lie-Algebra lässt Rückschlüsse auf die Struktur der Lie-Gruppe zu. So entsprechen sich z.B. die Unterstrukturen (s.Prop.1.13) und unter strengeren Voraussetzungen die Homomorphismen (s.Prop.1.10, Prop.1.14). Dieses führt zur Definition der Exponentialabbildung einer Lie-Gruppe G, welche die zug. Lie-Algebra g mit der Lie-Gruppe G verbindet. Abschließend werden die adjungierte Darstellung von Lie-Gruppen und von Lie-Algebren eingeführt.

Definition 1.1 *Sei G C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann: G* **Lie-Gruppe** $:\Longleftrightarrow$
i) $(G,\cdot)$ *abstrakte Gruppe*
ii) $G \times G \longrightarrow G : (g,h) \longmapsto gh^{-1}$ *ist* C^∞.
Sei G Lie-Gruppe. $\forall \sigma \in G$ definiere die **Linkstranslation mit $\boldsymbol{\sigma}$** *durch*
$l_\sigma : G \longrightarrow G : g \longmapsto \sigma g$.

Bemerkung 1.2 *Sei G Lie-Gruppe, $\sigma \in G$. Dann ist l_σ C^∞-Diffeomorphismus von G.*

Beispiel 1.3 *(Lie-Gruppen) i)* $(\mathbb{R}^n, +)$
ii) $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$
iii) $(\mathbb{S}^1, \cdot) \hookrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$
iv) $(G,\cdot)$, $(H,\cdot)$ *Lie-Gruppen* $\Longrightarrow G \times H$ *Lie-Gruppe als direktes Produkt*
v) $\mathbb{T}^n := \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1$
vi) $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$

Definition 1.4 *Sei G Lie-Gruppe. Dann:*
$X \in \mathfrak{X}(G)$ **linksinvariant** $:\Longleftrightarrow \forall \sigma \in G : X \circ l_\sigma = dl_\sigma \circ X$
$g := \{X \in \mathfrak{X}(G) | X linksinvariant\}$ *Menge der linksinvarianten Vektorfelder*

Definition 1.5 *Sei g $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*
$(g, [\cdot,\cdot])$ **Lie-Algebra über $\mathbb{K}$** $:\Longleftrightarrow$
i) $[\cdot,\cdot] : g \times g \longrightarrow \mathbb{K}$ *bilinear*
ii) $[x,y] = -[y,x]\ \forall x,y \in g$ *(***Antikommutativität***)*
iii) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0\ \forall x,y,z \in g$ *(***Jacobi-Identität***)*

Beispiel 1.6 *(Lie-Algebren) i) V $\mathbb{K}$-VR, $[x,y] := 0\ \forall x,y \in V \Longrightarrow V$ Lie-Algebra (solche Lie-Algebren heißen* **abelsch***)*
ii) $gl(n,\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n\times n}$, $[A,B] := AB - BA\ \forall A,B \in gl(n,\mathbb{K}) \Longrightarrow (gl(n,\mathbb{K}), [\cdot,\cdot])$ *Lie-Algebra*
iii) V $\mathbb{K}$-VR, $dim_{\mathbb{K}} V = 2$, x,y Basis, $[x,x] = [y,y] = 0$, $[x,y] := y \Longrightarrow (V, [\cdot,\cdot])$ Lie-Algebra
(!Bei 2-dimensionalen, nichtabelschen Lie-Algebren kann immer eine Basis derart gewählt werden, daß obige Gleichungen gelten!)
iv) $(\mathbb{R}^3, \times)$ *mit dem Kreuzprodukt*
v) Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann:
$sl(2,\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{2\times 2} | trA = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{K} \right\}$,
Basis: $h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow [h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h$

Proposition 1.7 *Sei G Lie-Gruppe, g die zug. Menge der linksinvarianten Vektorfelder. Dann:*
i) g $\mathbb{K}$-VR und $\alpha : g \longrightarrow T_eG : X \longmapsto X(e)$ ist lin. Isom. von g mit T_eG
$(\Longrightarrow dimg = dimT_eG = dimG)$.
ii) Für $X,Y \in g$ bezeichne $[X,Y] := XY - YX$ die Lie-Klammer der Vektorfelder X und Y. Dann gilt: $[X,Y] \in g\ \forall X,Y \in g$.
iii) g bildet zusammen mit der Lie-Klammer eine Lie-Algebra.

Hierdurch motiviert ist die folgende

Definition 1.8 *Sei G Lie-Gruppe. Dann definiere die* **zu G gehörende Lie-Algebra g** *durch* $g := \{X \in \mathfrak{X}(G) | X linksinvariant\}$.

Definition 1.9 *Seien G, H Lie-Gruppen, $\varphi : G \longrightarrow H$, V (endl. dim.) $\mathbb{K}$-VR.*
φ **(Lie-Gruppen-) Homomorphismus** $:\Longleftrightarrow$ *φ ist C^∞ und φ ist Homo. von abstrakten Gruppen*
φ **Iso. (Auto.)** $:\Longleftrightarrow$ *φ Homo. und Diffeo. (Homo., Diffeo. und $G = H$)*
Sei $H \in \{Aut(V), GL(n, \mathbb{K})\}$. Dann heißt ein Homo. $\varphi : G \longrightarrow H$ **eine Darstellung der Lie-Gruppe G über V** *bzw. $\mathbb{K}^n$.*
Seien g, h Lie-Algebren, $\psi : g \longrightarrow h$.
ψ **(Lie-Algebren-) Homomorphismus** $:\Longleftrightarrow$ *ψ linear und $\forall X, Y \in g : \psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$*
ψ **Iso. (Auto.)** $:\Longleftrightarrow$ *ψ Homo. und bijektiv (Homo., bijektiv und $g = h$)*
Sei $h \in \{End(V), gl(n, \mathbb{K})\}$. Dann heißt ein Homo. $\psi : g \longrightarrow h$ **eine Darstellung der Lie-Algebra g über V** *bzw. $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 1.10 *Seien G, H Lie-Gruppen mit zug. Lie-Algebren g, h und sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann ist $d\varphi : g \longrightarrow h$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren.*

Proposition 1.11 *Seien G, H Lie-Gruppen, G zshgd. und seien $\varphi, \psi : G \longrightarrow H$ Homo. mit $d\varphi = d\psi$. Dann: $\varphi = \psi$*

Definition 1.12 *Sei G Lie-Gruppe, dann heißt (H, φ)* **Lie-Untergruppe von G**
(Bez.: $H < G$) $:\Longleftrightarrow$
i) H Lie-Gruppe
ii) (H, φ) UMfgk. von G
iii) $\varphi : H \longrightarrow G$ Gruppenhomo.
Sei g Lie-Algebra, dann heißt $h \subset g$ **Lie-Unteralgebra von g** *(Bez.: $h < g$) $:\Longleftrightarrow$*
i) h UVR
ii) $[X, Y] \in h \ \forall X, Y \in h$

Proposition 1.13 *i) Sei G Lie-Gruppe, (H, φ) Lie-Untergruppe von G, und seien g, h die entsprechenden Lie-Algebren. Dann ist $d\varphi : h \longrightarrow d\varphi(h)$ ein linearer Iso..*
ii) Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g, sei $\tilde{h} < g$ Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zshgde Lie-Untergruppe (H, φ) von G mit $d\varphi(h) = \tilde{h}$.

Proposition 1.14 *Seien G, H Lie-Gruppen mit Lie-Algebren g, h und sei G einfach-zshgd. (,d.h. G wzshgd. und $\Pi_1(G) = 1$). Sei $\psi : g \longrightarrow h$ ein Homo.. Dann existiert genau ein Homo.*
$\varphi : G \longrightarrow H$ mit $d\varphi = \psi$.

Korollar 1.15 *Seien G, H einf.zshgde Lie-Gruppen mit isomorphen Lie-Algebren. Dann gilt:*
$G \cong H$.

Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g, sei $X \in g$. Dann ist $\lambda \frac{d}{dr} \longmapsto \lambda X$ ein Homo. von Lie-Algebren, wobei ferner $\Pi_1(\mathbb{R}) = 1$ gilt. Also existiert nach Prop. 1.14 genau ein Homo. $exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ mit $dexp_X(\lambda \frac{d}{dr}) = \lambda X$, d.h. exp_X ist der eindeutig bestimmte Homo. mit Tangentialvektor $\dot{exp}_X(0) = dexp_X(\frac{d}{dr}|_0) = X(e)$. Damit kommen wir nun zur folgenden

Definition 1.16 *Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g. Definiere die* **Exponentialabbildung von G** *durch $exp_G = exp : g \longrightarrow G : X \longmapsto exp_X(1)$.*

Beispiel 1.17 *(Exponentialabbildung) Für $G = GL(n, \mathbb{K})$ gelten: $g = gl(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n,n}$ und*
$exp : g \longrightarrow G$ ist das bekannte Exponential von Matrizen $A \longmapsto expA := e^A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Proposition 1.18 *Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g, sei $X \in g$. Dann:*
i) $exp(tX) = exp_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$
ii) $exp(t_1 + t_2)X = (expt_1X)(expt_2X)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
iii) $exp(-tX) = (exptX)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$
iv) $exp : g \longrightarrow G$ *ist* C^∞ *und* $dexp : T_0g \longrightarrow T_eG$ *ist die Identität, also ist das Exponential eingeschränkt auf eine Umgebung von* $0 \in g$ *ein Diffeomorphismus mit einer Umgebung von* $e \in G$.

Proposition 1.19 *Seien H, G Lie-Gruppen mit Lie-Algebren h, g, sei $\varphi : H \longrightarrow G$ ein Homo.. Dann gilt:* $\varphi \circ exp_H = exp_G \circ d\varphi$.

Definition 1.20 *Sei M $C^\infty-$Mfgk., G Lie-Gruppe. Eine $C^\infty-$ Abb.*
$\mu : G \times M \longrightarrow M : (g, m) \longmapsto \mu(g, m) =: g.m$ *mit den Eigenschaften*
i) $(\sigma\tau).m = \sigma.(\tau.m)$
ii) $e.m = m \ \forall \sigma, \tau \in G, m \in M$
heißt eine **Linksoperation von G auf M**.

Bemerkung 1.21 *Sei $\mu : G \times M \longrightarrow M$ eine Linksoperation, $\sigma \in G$ fest gewählt. Dann ist* $\mu_\sigma : M \longrightarrow M : m \longmapsto \mu(\sigma, m) = \sigma.m$ *ein Diffeo. von M.*

Proposition 1.22 *Sei $\mu : G \times M \longrightarrow M$ Linksoperation. Sei $m_0 \in M$ ein Fixpunkt der Operation, d.h. $\mu_\sigma(m_0) = m_0 \ \forall \sigma \in G$. Dann ist $\psi : G \longrightarrow Aut(T_{m_0}M) : \sigma \longmapsto d\mu_\sigma| \ T_{m_0}M$ eine Darstellung von G.*

Sei G Lie-Gruppe. G wirkt auf sich selbst durch Konjugation
$a : G \times G \longrightarrow G : (\sigma, \tau) \longmapsto a_\sigma(\tau) := \sigma\tau\sigma^{-1}$ mit Fixpunkt $e \in G$. Also sinnvoll nach Prop. 1.22 ist folgende

Definition 1.23 *Sei G Lie-Gruppe. Die* **adjungierte Darstellung von G** *ist definiert durch* $Ad : G \longrightarrow Aut(T_eG) \cong Aut(g) : \sigma \longmapsto da_\sigma| \ T_eG \cong g$.

Führe folgende Bezeichnungen ein: $ad := d(Ad)$, $Ad_\sigma := Ad(\sigma)$, $ad_X := ad(X)$

Proposition und Definition 1.24 *Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g und seinen $X, Y \in g$. Dann: $ad_X(Y) = [X, Y]$. Also ist ad eine Darstellung von g über g, die die* **adjungierte Darstellung von g** *genannt wird.*

2 Klassifikation komplexer, halbeinfacher Lie-Algebren

Abstract: Dieser Weg der Klassifikation der komplexen, halbeinfachen Lie-Algebren läßt sich in einem Zwei-Schritte-Schema zusammenfassen. Im ersten Schritt ordnet man einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra ein abstraktes, reduziertes Wurzelsystem zu. Hierbei stellt man fest, dass eine komplexe, halbeinfache Lie-Algebra als Vektorraum aus mehreren Kopien der Lie-Algebra $sl(2, \mathbb{C})$ aufgebaut ist. Im zweiten Schritt ordnet man dann dem abstrakten, reduzierten Wurzelsystem eine abstrakte Dynkinmatrix zu, wobei es einem gelingen wird, diese Matrizen zu klassifizieren. Diese Zuordnungen sind so 'schön' gewählt, daß die Klassifikation der abstrakten Dynkin-Matrizen gleichbedeutend mit der Klassifikation der komplexen, halbeinfachen Lie-Algebren ist. Abschließend beschreiben die Serre-Relationen, daß eine beliebige komplexe, halbeinfache Lie-Algebra isomorph zu einer bestimmten Quotientenalgebra einer freien Lie-Algebra ist.

Definition 2.1 *Sei g Lie-Algebra. $h \subset g$ heißt* **Ideal in g** *(Bez.: $h \lhd g$)* $:\Longleftrightarrow$
i) h UVR von g, ii) $[h, g] \subset h$.
(Es gilt: $h \lhd g \Longrightarrow h < g$.)

Definition 2.2 *Sei g Lie-Algebra, $h < g$ Lie-Unteralgebra von g. Definiere den* **Normalisator von h in g** *durch* $N_g(h) := \{X \in g | \ [X, Y] \in h \ \forall Y \in h\}$.
(Es gilt: $N_g(h)$ ist wieder Lie-Unteralgebra.)

Definition 2.3 *Sei g Lie-Algebra. Definiere rekursiv: $g_0 := g$, $g_1 := [g, g]$, $g_{j+1} := [g, g_j]$. Damit:* g **nilpotent** $:\Longleftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} : g_j = 0$.

Beispiel 2.4 *(nilpotente Lie-Algebra) Die Lie-Algebra der oberen Dreiecksmatrizen mit verschwindenen Diagonaleinträgen ist nilpotent.*

Definition 2.5 *Sei g endl.-dim. Lie-Algebra. Dann:*
i) g **einfach** $:\Longleftrightarrow$ *g ist nicht abelsch und g besitzt keine nichttrivialen Ideale.*
ii) g **halbeinfach** $:\Longleftrightarrow g = g_1 \oplus ... \oplus g_m$ *als Lie-Algebra mit $g_j \lhd g$ einfache Lie-Algebren,* $j = 1, .., m$.

Definition 2.6 *Sei g endl.-dim. Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Die* **Killing-Form B von g** *ist definiert durch $B : g \times g \longrightarrow \mathbb{K} : (X, Y) \longmapsto Tr(adXadY)$ (!symm. Bilinearform!).*

Beispiel 2.7 *(Killing-Form)*
Für $g = sl(2, \mathbb{C})$ gilt $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *bzgl. der geordneten Basis (h, e, f) (s.Bsp.1.6.v)).*

Proposition 2.8 *(Cartan's Kriterium für Halbeinfachheit)*
Eine Lie-Algebra g ist halbeinfach genau dann, wenn die Killing-Form B nicht-entartet ist.

Definition 2.9 *Eine nilpotente Lie-Unteralgebra h einer endl.-dim. komplexen Lie-Algebra g heißt* **Cartan-Unteralgebra** $:\Longleftrightarrow h = N_g(h) = \{X \in g |\ [X, h] \subset h\}$.

Proposition und Definition 2.10 *Sei g endl.-dim. komplexe Lie-Algebra. Dann existiert eine bis auf innere Automorphismen eindeutig bestimmte Cartan-Unteralgebra h. Die diesen Cartan-Unteralgebren gemeinsame Dimension wird* **Rank von g** *genannt: $rank(g) := dimh$.*

Bis zum Ende von Kapitel 2 gelten stets die folgenden Bezeichnungen:
g ... komplexe, halbeinfache Lie-Algebra
B ... zug. Killing-Form
h ... Cartan-Unteralgebra von g

Definition 2.11 $0 \neq \alpha \in h^*$ **Wurzel von g in Bezug auf h** $:\Longleftrightarrow$
$g_\alpha := \{X \in g |\ \forall H \in h\ \exists n \in \mathbb{N} : (ad(H) - \alpha(H)Id)^n X = 0\} \neq 0$
$\Delta := \Delta(g, h) := \{0 \neq \alpha \in h^* |\ g_\alpha \neq 0\}$ **Menge der Wurzeln**
$X \in g_\alpha$ *heißt* **Wurzelvektor zur Wurzel $\alpha \in \Delta$.**

Proposition 2.12 *i) Es gilt die* **Wurzelraum-Zerlegung von g**: $g = h \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} g_\alpha$ *mit* $dim g_\alpha = 1$.
ii) $\forall \alpha \in \Delta\ \exists H_\alpha \in h : \alpha(H) = B(H, H_\alpha)\ \forall H \in h$
iii) $\forall \alpha \in \Delta\ \exists 0 \neq E_\alpha \in g_\alpha : [H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha\ \forall H \in h$
iv) $\forall \alpha \in \Delta\ \forall X \in g_{-\alpha} : [E_\alpha, X] = B(E_\alpha, X) H_\alpha$
v) $\{E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ *können so normiert werden, daß* $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$.

Nach Prop.2.12 kann man sagen, daß g aus mehreren Kopien der $sl(2, \mathbb{C})$ aufgebaut ist. Die detailierte Struktur von g wird verständlich, wenn man weiß, wie diese verschiedenen Kopien zusammengesetzt sind.
Führe Bilinearform auf h^* ein durch: $\langle \varphi, \psi \rangle := B(H_\varphi, H_\psi) = \varphi(H_\psi) = \psi(H_\varphi)$ mit H_φ, H_ψ wie in Prop.2.12.ii).

Definition 2.13 *Sei $h_0 := span_{\mathbb{R}}\{H_\alpha |\ \alpha \in \Delta\}$, sei $\alpha \in \Delta$. Die* **Wurzelspiegelung an α** *ist definiert durch:* $s_\alpha : h_0^* \longrightarrow h_0^* : \varphi \longmapsto \varphi - \frac{2\langle \varphi, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$.

Definition 2.14 *Ein* **abstraktes Wurzelsystem in** *einem endl.-dim. reellen Innerproduktraum* $\boldsymbol{V}$ *mit innerem Produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist eine endliche Menge* $\triangle \subset V\backslash\{0\}$ *mit den Eigenschaften:*
i) Δ *erzeugt* V
ii) $s_\alpha : \Delta \longrightarrow \Delta\ \forall \alpha \in \Delta$
iii) $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha, \beta \in \Delta$
Ein abstraktes Wurzelsystem heißt **reduziert**, *wenn gilt:* $\alpha \in \Delta \Longrightarrow 2\alpha \notin \Delta$.
Zwei abstrakte Wurzelsysteme Δ *in* V *und* Δ' *in* V' *sind* **isomorph** $:\Longleftrightarrow \exists$ *lin. Iso.* $\Phi : V \longrightarrow V'$ *mit:*
i) $\Phi(\Delta) = \Delta'$
ii) $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle\Phi(\beta),\Phi(\alpha)\rangle}{\langle\Phi(\alpha),\Phi(\alpha)\rangle},\ \forall \alpha, \beta \in \Delta$

Proposition 2.15 *Das Wurzelsystem einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra* g *in Bezug auf eine Cartan-Unteralgebra* h *ist ein abstraktes, reduziertes Wurzelsystem in* h_0^*.

In V wird jetzt eine Notation von **Positivität** eingeführt, die die Eigenschaften:
i) Für beliebige $\varphi \in V\backslash\{0\}$ ist entweder φ oder $-\varphi$ positiv.
ii) die Summe von positiven Elementen ist positiv
iii) positive Vielfache von positiven Elementen sind positiv
erfüllt. Dieses kann z.B. durch lexikographische Ordnung in Bezug auf ein beliebiges Erzeugendensystem von V geschehen. Sei dieses nun geschehen. Dann:

Definition 2.16 *Sei* $\alpha \in \Delta$. α *heißt* **einfach** $:\Longleftrightarrow \alpha > 0$ *und* α *ist nicht zerlegbar in* $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ *mit* $\beta_1, \beta_2 \in \Delta$, $\beta_1, \beta_2 > 0$.

Proposition 2.17 *Sei* Δ *ein abstraktes Wurzelsystem in* V, $dimV = l$. *Dann existieren* l *linear unabhängige, einfache Wurzeln* $\alpha_1, .., \alpha_l$. *Wenn* $\beta \in \Delta$ *mit* $\beta = x_1\alpha_1 + .. + x_l\alpha_l$, *dann sind alle* x_i *ganzzahlig und haben dasselbe Vorzeichen.*

Sei für den Rest des Kapitels Δ ein abstraktes Wurzelsystem. Ferner sei eine Notation von Positivität eingeführt, und Π sei das nach Prop.2.17 zu Δ geh. System von einfachen Wurzeln.

Definition 2.18 *Sei* $\Pi = \{\alpha_1, .., \alpha_l\}$ *mit* $l = dimV$. *Die* **zu $\boldsymbol{\Delta}$ und $\boldsymbol{\Pi}$ gehörende Cartan-Matrix** *ist definiert durch* $A = (\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle})_{i,j=1}^l$.

Proposition 2.19 *Die Cartan-Matrix* $A = (A_{ij})$ *von* Δ *in Bezug auf* Π *hat die folgenden Eigenschaften:*
i) $A_{ij} \in \mathbb{Z}\ \forall i, j$
ii) $A_{ii} = 2\ \forall i$
iii) $A_{ij} \leq 0\ \forall i \neq j$
iv) $A_{ij} = 0 \Longleftrightarrow A_{ji} = 0\ \forall i, j$
v) $\exists$ *Diagonalmatrix* D *mit positiven Einträgen, so dass* DAD^{-1} *symm., pos. definit ist.*

Definition 2.20 *Eine quadratische Matrix mit den Eigenschaften i)-v) aus Prop.2.19 heißt eine* **abstrakte Cartan-Matrix**.
Zwei abstrakte Cartan-Matrizen heißen **isomorph**, *wenn sie zueinander konjugiert durch eine Permutationsmatrix sind.*

Die bisherige Arbeit kann in dem folgenden Zwei-Schritte-Diagramm zusammengefasst werden:

komplexe, halbeinfache Lie-Algebra	$\longrightarrow$	abstraktes, reduziertes Wurzelsystem	$\longrightarrow$	abstrakte Cartan-Matrix

,wobei im ersten Schritt eine Cartan-Unteralgebra und im zweiten Schritt eine Ordnung ausgewählt werden. Man kann nun folgendes zeigen:

Theorem 2.21 *Die einzelnen Schritte im obigen Zwei-Schritte-Diagramm sind bis auf Isomorphie wohldefiniert, d.h. unabhängig von den getroffen Wahlen, und sie sind jeweils surjektiv und injektiv bis auf Isomorphie sind.*

Mit diesem Theorem ist die Klassifikation der komplexen, halbeinfachen Lie-Algebren auf die Klasifikation von abstrakten Cartan-Matrizen zurückgeführt, wobei letztere z.B. in Knapp ausgeführt ist (Details: [3], S.162-203).

Definition 2.22 *Sei* $\mathbb{K}$ *Körper,* E $\mathbb{K}-VR$, $T(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(E)$ *die Tensoralgebra von* E. *Die* **symmetrische Algebra** $\boldsymbol{S(E)}$ **von** $\boldsymbol{E}$ *ist definiert durch* $S(E) := T(E)/I$, *wobei* I *das durch* $u \otimes v - v \otimes u$, $u, v \in T^1(E)$, *erzeugte beidseitige Ideal ist.*

Bemerkung 2.23 *i)* $S(E)$ *ist eine assoziative Algebra mit* 1.
ii) $S(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(E)/I \cap T^k(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(E)$
iii) $S^k(E)$ *'besitzt die univ. Eigenschaft bzgl. symm. k-multilinearen Abbildungen'*
iv) Sei $\{u_i\}_{i\in A}$ *Basis von* E *mit total geordneter Indexmenge* A. *Dann gilt:*
$u_{i_1}^{j_1} \cdots u_{i_k}^{j_k}$, $i_1 < ... < i_k$, $\sum_m j_m = n$ *ist Basis von* $S^n(E)$.

Definition 2.24 *Die* **universelle, einhüllende Algebra** $\boldsymbol{U(g)}$ **von** $\boldsymbol{g}$ *ist definiert durch* $U(g) := T(g)/J$, *wobei* J *das von* $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, $X, Y \in T^1(g)$, *erzeugte beidseitige Ideal ist.*

Bemerkung 2.25 *i)* $U(g)$ *ist eine assoziative Algebra mit 1*
ii) $\iota : g \longrightarrow T(G) \longrightarrow U(g)$ *hat die Eigenschaft* $\iota[X, Y] = \iota(X)\iota(Y) - \iota(Y)\iota(X)$, $X, Y \in g$
iii) $U(g)$ *ist 'komplizierter aufgebaut' als z.B.* $T(g)$, $S(g)$, *da das Ideal* J *nicht von homogenen Tensoren erzeugt wird*
$\rightsquigarrow U(g)$ *nicht in natürlicher Weise graduiert.*

Proposition 2.26 *Die Algebra* $U(g)$ *und die kanonische Abb.* $\iota : g \longrightarrow U(g)$ *haben die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder komplexen, assoziativen Algebra* A *mit 1 und jeder linearen Abb.* $\pi : g \longrightarrow A$ *mit* $\pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) = \pi[X, Y]$ $\forall X, Y \in g$ *existiert ein eindeutig bestimmter Algebrahomo.* $\tilde{\pi} : U(g) \longrightarrow A$ *mit* $\tilde{\pi}(1) = 1$ *und* $\tilde{\pi} \circ \iota = \pi$.

Korollar 2.27 *Darstellungen von* g *über* $\mathbb{C}$*-VRen stehen in 1:1-Beziehung mit unitären, linken* $U(g)$*-Modulen.*

Theorem 2.28 *(Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem)*
Sei $\{X_i\}_{i\in A}$ *Basis von* g *mit total geordneter Indexmenge* A. *Dann ist die Menge aller Monome* $(\iota X_{i_1})^{j_1}...(\iota X_{i_n})^{j_n}$, $i_1 < ... < i_n$, $j_k \geq 0$ *eine Basis von* $U(g)$. *Insbesondere ist* $\iota : g \longrightarrow U(g)$ *injektiv.*

Bemerkung 2.29 $U(g) \cong S(g)$ *als VR, aber nicht als Algebren. Als Algebren gilt:* $S(g) \cong grU(g)$.

Definition 2.30 *Sei* X *Menge. Eine* **freie Lie-Algebra über** $\boldsymbol{X}$ *ist ein Paar* $(\mathcal{F}, \iota)$ *bestehend aus einer Lie-Algebra* $\mathcal{F}$ *und einer Abb.* $\iota : X \longrightarrow \mathcal{F}$ *mit folgender univ. Eigenschaft: Zu jeder komplexen Lie-Algebra* $\mathcal{L}$ *und Abb.* $\phi : X \longrightarrow \mathcal{L}$ $\exists!$ *Lie-Algebrahomo.* $\tilde{\phi} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$ *mit* $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$.

Proposition 2.31 *Wenn* X *eine nichtleere Menge ist, dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte freie Lie-Algebra* $\mathcal{F}$ *über* X *und das Bild* $\iota(X)$ *von* X *in* $\mathcal{F}$ *erzeugt* $\mathcal{F}$.

Seien jetzt wieder g, h, Δ, B, $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, $A = (A_{ij})$ wie oben. Weiter seien $h_i = \frac{2}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} H_{\alpha_i}$, $e_i \neq 0$ Wurzelvektor von α_i, $f_i \neq 0$ Wurzelvektor von $-\alpha_i$ mit $B(e_i, f_i) = \frac{2}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$, dann:

Proposition und Definition 2.32 $X = \{h_i, e_i, f_i\}_{i=1}^{l}$ *erzeugt* g *als Lie-Algebra.* X *wird die* **Menge der Standarderzeuger von** $\boldsymbol{g}$ **in Bezug auf** $\boldsymbol{h, \Delta, B, \Pi}$ **und** $\boldsymbol{A}$ *genannt.*

Proposition und Definition 2.33 *Sei X wie oben. Dann gelten:*
i) $[h_i, h_j] = 0$
ii) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$
iii) $[h_i, e_j] = A_{ij} e_j$
iv) $[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j$
v) $(ade_i)^{-A_{ij}+1} e_j = 0,\ i \neq j$
vi) $(adf_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0,\ i \neq j$
Die Relationen i)-vi) werden **Serre-Relationen von g** *genannt.*

Theorem 2.34 *Seien g halbeinfache Lie-Algebra, $X = \{h_i, e_i, f_i\}_{i=1}^{l}$ Menge von Standarderzeugern von g, $\mathcal{F}$ freie Lie-Algebra über $3l$ Erzeugern h_i, e_i, f_i, $i = 1, .., l$ und $\mathcal{R}$ sei das Ideal in $\mathcal{F}$ erzeugt durch die Serre-Relationen i)-vi). Dann ist der kanonische Homomorphismus $\Phi : \mathcal{F}/\mathcal{R} \longrightarrow g$ ein Isomorphismus.*

3 Das Haarsche Mass

Definition 3.1 *Eine* **topologische Gruppe G** *ist ein topologischer Raum, der gleichzeitig eine abstrake Gruppe ist, mit der Eigenschaft, daß die Abbildung $G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto gh^{-1}$ stetig ist.*
Eine **kompakte Gruppe G** *ist eine topologische Gruppe G mit kompakter und hausdorffscher Topologie.*
Eine **lokalkompakte Gruppe G** *ist eine topologische Gruppe G mit der Eigenschaft, daß zu jeden $g \in G$ eine kompakte Umgebung existiert.*

Definition 3.2 *Sei G lokalkompakte Gruppe. Ein positives Maß μ definiert auf einer σ-Algebra $\mathcal{M}$, die die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthält, heißt* **σ-regulär**, *wenn*
i) $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = inf(\mu(V))$ *über alle offenen* $V \subset A$
ii) $\forall K \subset\subset G$: $\mu(K) < \infty$
iii) $A \in \mathcal{A}, A$ *σ-finit* $\Longrightarrow \mu(A) = sup(\mu(K))$ *über alle* $K \subset\subset A$
Ein **Haarsches Maß auf G** *ist ein pos. Maß μ auf den Borelmengen, dass σ-regulär, linksinvariant und auf jeder nichtleeren, offenen Menge positiv ist, wobei linksinvariant*
$\mu(gA) = \mu(A)\ \forall g \in G, A$ *meßbar bedeuten soll.*

Definition 3.3 *Sei G Lie-Gruppe. Eine k-Form $\omega \in \bigwedge^k(G)$ heißt* **linksinvariant**, *wenn gilt:*
$l_g^* \omega = \omega\ \forall g \in G.$

Bemerkung 3.4 *i)* $\omega \in \bigwedge^k(G)$ *linksinvariant*
$\Longrightarrow \omega_e(t_1, .., t_k) = \omega_\sigma(dl_\sigma(t_1), .., dl_\sigma(t_k))\ \forall t_1, .., t_k \in T_eG, \sigma \in G.$
ii) $\omega_1, .., \omega_l$ *linksinvariant* $\Longrightarrow \omega_1 \wedge .. \wedge w_l$ *linksinvariant.*

Proposition 3.5 *Sei G Lie-Gruppe. Dann existiert ein Haarsches Maß auf G.*

Bemerkung 3.6 *Sei μ das ω zugeordnete Maß. Dann gilt:* $\int_G f(\sigma h) d\mu(h) = \int_G f(h) d\mu(h)\ \forall \sigma \in G.$

Bemerkung 3.7 *Sei G kompakte Lie-Gruppe. Dann kann das Maß so gewählt werden, dass gilt:*
$\int_G d\mu = 1.$

Proposition 3.8 *Sei G lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein Haarsches Maß auf G.*

4 Darstellungen von Lie-Gruppen

Definition 4.1 *Eine* **endlich-dimensionale Darstellung einer Lie-Gruppe G über einem komplexen VR V** *ist ein C^∞-Gruppen-Homo. $\Phi : G \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$ mit $dimV < \infty$.*

Beispiel 4.2 *(Darstellungen) i) triviale Darstellung:* $G \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V) : g \longmapsto id_V$

ii) Für $G \in \{GL_n(\mathbb{C}), SU(n), U(n)\}$, $V = \mathbb{C}^n$ *die Standarddarstellung:* $\phi(g)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Definition 4.3 *Sei* Φ *endl.-dim. Darstellung einer Lie-Gruppe* G *über* V*. Ein* **invarianter Unterraum von Φ** *ist ein UVR* $U < V$ *mit* $\Phi(g)(U) \subset U \;\forall g \in G$*.*
Φ *heißt* **irreduzibel***, wenn* $V \neq 0$ *und* $0, V$ *die einzigen invarianten URe sind.*

Definition 4.4 *Sei* G *Lie-Gruppe,* Φ *endl.-dim. Darstellung von* G *über* V*. Die zu* Φ **kontragrediente Darstellung Φ^c** *auf* V^* *ist definiert durch:* $\Phi^c : G \longrightarrow GL(V^*)$ *mit*
$\langle \Phi^c(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \Phi(g)^{-1}v\rangle \;\forall g \in G, v^* \in V^*, v \in V$*.*

Definition 4.5 *Seien* Φ_1, Φ_2 *endl.-dim. Darst. einer Lie-Gruppe* G *über* V_1 *bzw.* V_2*. Dann definiere das* **Tensorprodukt $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ der Darstellungen Φ_1 und Φ_2** *durch*
$(\Phi_1 \otimes \Phi_2(g)) := \Phi_1(g) \otimes \Phi_2(g)$*. Dann ist* $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ *eine endl.dim. Darst. von* G *über* $V_1 \otimes V_2$*. Für das k-fache Tensorprodukt von* ϕ_1 *schreibt man auch* $T^k(\Phi_1) : G \longrightarrow GL(V_1^{\otimes k})$*.*

Seien $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$, $T^k(\Phi)$ wie oben. Seien I, I' die $S(V), \bigwedge(V)$ definierenden Ideale. Dann sieht man schnell ein, daß $T^k(V) \cap I, T^k(V) \cap I'$ invariante Unterräume von $T^k(\Phi)$ sind. Also:

Proposition und Definition 4.6 *Sei* $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ *endl.-dim. Darstellung einer Lie-Gruppe* G*. Dann definiere* $S^k(\Phi) : G \longrightarrow GL(S^k(V))$ *bzw.* $\bigwedge^k(\Phi) : G \longrightarrow GL(\bigwedge^k(V))$ *kanonisch durch:*
$S^k(\Phi)(g)(v_1 \otimes .. \otimes v_k + T^k(V) \cap I) := T^k(\Phi)(g)(v_1 \otimes .. \otimes v_k) + T^k(V) \cap I$ *bzw.*
$\bigwedge^k(\Phi)(g)(v_1 \otimes .. \otimes v_k + T^k(V) \cap I') := T^k(\Phi)(g)(v_1 \otimes .. \otimes v_k) + T^k(V) \cap I'$*.*
Dann sind $S^k(\Phi), \bigwedge^k(\Phi)$ *endl.-dim. Darstellungen von* G*, die sog.* **k-te symm. Potenz bzw. k-te äußere Potenz von Φ***.*

Definition 4.7 *Sei* Φ *endl.-dim. Darst. einer Lie-Gruppe* G *über einem Innenproduktraum* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*.*
Φ *heißt* **unitär***, falls gilt:* $\Phi(g)$ *unitär in Bezug auf* $\langle\cdot,\cdot\rangle \;\forall g \in G$ $(\Phi(g)^*\Phi(g) = Id_V)$*.*

Proposition 4.8 *Seien* Φ *unitäre Darst. einer Lie-Gruppe* G *über* V *und* $U < V$ *invarianter UR von* Φ*. Dann ist* $U^\perp$ *invarianter UR von* Φ*.*

Definition 4.9 *Zwei Darstellungen* Φ_1 *einer Lie-Gruppe* G *über* V_1*,* Φ_2 *von* G *über* V_2 *heißen* **äquivalent** $(\Phi_1 \cong \Phi_2)$*, wenn ein lin. Iso.* $E : V_1 \longrightarrow V_2$ *existiert mit:*
$\Phi_2(g) \circ E = E \circ \Phi_1(g) \;\forall g \in G$*.*

Seien ab jetzt, wenn nicht anders angegeben, G *kompakte* Lie-Gruppe, Φ endl.-dim. Darst. von G über V. Sei auch entsprechend Bem. 3.7 ein Haarsches Maß auf G gewählt mit $\int\limits_G d\mu = 1$.

Proposition 4.10 *Sei* Φ *Darst. von* G *über* V*. Dann existiert herm. inneres Produkt auf* V*, so daß* Φ *unitär ist.*

Korollar 4.11 *Sei* Φ *Darst. von* G *über* V*. Dann läßt sich* Φ *darstellen als direkte Summe von Darstellungen, d.h.* $V = V_1 \oplus .. \oplus V_k$ *mit invarianten URen* $V_1, .., V_k$*.*

Proposition 4.12 *(Schur's Lemma) Seien* Φ *bzw.* Φ' *irr. Darstellungen von* G *über endl.-dim.* V *bzw.* V'*. Wenn* $L : V \longrightarrow V'$ *linear ist mit* $\Phi'(g) \circ L = L \circ \Phi(g) \;\forall g \in G$*, dann ist* L *bijektiv oder* 0*.*

Korollar 4.13 *Sei* Φ *irr. Darst. von* G *über endl.-dim.* V*. Wenn* $L : V \longrightarrow V$ *linear ist mit* $\Phi(g) \circ L = L \circ \Phi(g) \;\forall g \in G$*, dann ist* L *ein Skalar.*

Korollar 4.14 *(Schur's Orthogonalitäts-Relationen)*
i) Seien Φ *bzw.* Φ' *nicht-äquivalente, irr., unitäre Darst. von* G *über endl.-dim.* V *bzw.* V'*. Dann gilt:* $\int_G (\Phi(x)u, v)\overline{(\Phi'(x)u', v')}dx = 0 \; \forall u, v \in V,\; u', v' \in V'$
ii) Sei Φ *irr., unitäre Darst. von* G *über endl.-dim.* V*. Dann gilt:*
$\int_G (\Phi(x)u_1, v_1)\overline{(\Phi(x)u_2, v_2)}dx = \frac{(u_1,u_2)\overline{(v_1,v_2)}}{dim V} \; \forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$

Bemerkung 4.15 *Zur Interpretation hiervon siehe Peter-Weyl-Theorem und Korrolare.*

Definition 4.16 *Sei* Φ *unitäre Darst. von* G *über* V*. Ein* **Matrix-Koeffizient** *von* Φ *ist eine Funktion auf* G *der Form* $x \longmapsto (\Phi(x)u, v)$*.*
Der **Charakter von Φ** *ist die Funktion definiert durch:* $\chi_\Phi(x) := Tr\Phi(x) = \sum\limits_i (\Phi(x)u_i, u_i)$*, wobei* $\{u_i\}_i$ *eine ONB von* V *ist.*

Proposition 4.17 *Sei* Φ *dir. Summe der Darstellungen* $\Phi_1, .., \Phi_n$*, dann gilt:*
$\chi_\Phi(x) = \chi_{\Phi_1} + .. + \chi_{\Phi_n}$*.*
Entsprechend gelten: $\chi_{\Phi^c} = \overline{\chi_\Phi}$*,* $\chi_{\Phi\otimes\Phi'} = \chi_\Phi\chi_{\Phi'}$ *für eine weitere Darst.* Φ'*.*

5 Darstellungen von Lie-Algebren

Definition 5.1 *Sei* g *Lie-Algebra. Eine* **endlich dimensionale Darstellung von *g* über einem komplexen *V*** *ist ein Lie-Algebren-Homo.* $\phi : g \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V)$ *mit* $dim V < \infty$*.*
Ein **invarianter UR von φ** *ist ein UR* $U < V$ *mit* $\phi(X)(U) \subset U \; \forall X \in g$*.*
Eine Darstellung von g *heißt* **irreduzibel***, wenn* $V \neq 0$ *und* $0, V$ *die einzigen invarianten URe sind.*
Zwei Darstellungen ϕ *und* ϕ' *von* g *über* V *bzw.* V' *heißen* **äquivalent***, wenn ein linearer Iso.* $E : V \longrightarrow V'$ *existiert mit* $\phi'(X) \circ E = E \circ \phi(X) \; \forall X \in g$*.*

Proposition 5.2 *(Schur's Lemma) Seien* ϕ *bzw.* ϕ' *irr. Darstellungen einer Lie-Algebra* g *über endl.-dim.* V *bzw.* V'*. Wenn* $L : V \longrightarrow V'$ *linear ist mit* $\phi'(X) \circ L = L \circ \Phi(X) \; \forall X \in g$*, dann ist* L *bijektiv oder* 0*.*

Korollar 5.3 *Sei* ϕ *irr. Darst. einer Lie-Algebra* g *über endl.-dim.* V*. Wenn* $L : V \longrightarrow V$ *linear ist mit* $\phi(X) \circ L = L \circ \phi(X) \; \forall X \in g$*, dann ist* L *ein Skalar.*

Seien für den Rest des Kapitels, solange nicht anders angegeben, g eine komplexe, halbeinfache Lie-Algebra, h eine Cartan-Unteralgebra von g, $\Delta = \Delta(g, h)$ das zug. System von Wurzeln. Seien ferner h_0 die Realform von h, auf der alle Wurzeln reel sind, und B die Killing-Form von g. Seien für $\alpha \in \Delta$ $H_\alpha \in h$ wie oben in Kapitel 2 gewählt mit $h_0 = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha$.

Sei ϕ eine Darstellung von g über V. Für $\lambda \in h^*$ definiere
$V_\lambda := \{v \in V | \; \forall H \in h \; \exists n \in \mathbb{N} : (\phi(H) - \lambda(H)Id)^n v = 0\}$.

Definition 5.4 *Seien* ϕ *Darstellung von* g*,* $\lambda \in h^*$*. Falls* $V_\lambda \neq 0$*, dann heißen* λ **verallgemeinerter Gewichtsraum** *und* λ **Gewicht***. Vektoren aus* V_λ *heißen* **verallgemeinerte Gewichtsvektoren***.*
Wenn V *endl.-dim. ist, dann ist* V *direkte Summe seiner verallgemeinerten Gewichtsräume.*
Der **zu λ gehörende Gewichtsraum** *ist definiert durch* $\{v \in V | \; \forall H \in h\text{: } \phi(H)v = \lambda(H)v\}$*.*
Vektoren aus den Gewichtsräumen heißen **Gewichtsvektoren***.*

Definition 5.5 $\lambda \in h^*$ *heißt* **algebraische Integralform***, falls gilt:* $\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \; \forall \alpha \in \Delta$*.*

Proposition 5.6 *Sei ϕ Darst. von g über endl.-dim., kompl. VR V. Dann:*
i) $\phi(h)$ wirkt diagonalisierbar auf V, so daß jeder verallg. Gewichtsvektor ein Gewichtsvektor ist und V die direkte Summe seiner Gewichtsräume ist,
ii) jedes Gewicht ist reel-wertig auf h_0 und ist eine algebraische Integralform,
iii) Wurzeln und Gewicht stehen in Zusammenhang über $\phi(g_\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$.

Sei jetzt noch zusätzlich wie in Kap.2 eine Ordnung auf h_0^* eingeführt und sei Π das hieraus resultierende einfache System.
Sei ϕ Darst. von g über endl.-dim., kompl. V. Nach der letzten Prop. sind die Gewichte von V in h_0^*. Also sinnvoll die folgende

Definition 5.7 *Das bzgl. der in h_0^* eingeführten Ordnung größte Gewicht wird das* **höchste Gewicht von ϕ** *genannt.*

Theorem 5.8 *(Theorem vom höchsten Gewicht)*
Bis auf Äquivalenz stehen die irreduziblen, endlich-dimensionalen Darstellungen ϕ von g in 1:1 Beziehung mit den dominanten, algebraischen Linearformen λ auf h, indem man λ das höchste Gewicht ϕ_λ zuordnet. Hierbei heißt λ dominant, falls gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$, $\forall \alpha \in \Pi$.

Um die in dieser Proposition behauptete Korrespondenz anzugeben, werden noch die folgenden Bezeichnungen und Begriffe benötigt:

Führe mit den obigen Bezeichnungen die folgenden Abkürzungen ein:
$n := \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta^+} g_\alpha$, $n^- := \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta^+} g_{-\alpha}$, $b := h \oplus n$, $\delta := \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$.
Dann sind n, n^-, b Lie-Unteralgebren und $g = b \oplus n^-$ als VRe.

Bemerkung 5.9 *Sei der komplexe Vektorraum V ein unitäres, linkes $U(g)$-Modul. Wegen Kor.2.27 sind dann für V die obigen Begriffe von Gewicht, Gewichtsraum und Gewichtsvektor definiert. Bezeichne jetzt aber mit V_μ den Gewichtsraum zum Gewicht μ.*

Definition 5.10 *Ein* **Höchstgewichtsvektor von einem unitären, linken $U(g)$-Modul V** *ist per Definition ein $v \in V$ mit $n(v) = 0$.*
Ein **Höchstgewichtsmodul** *ist ein $U(g)$-Modul, daß von einem Höchstgewichtsvektor erzeugt wird.*

Definition 5.11 *Seinen M_1, M_2 $\mathbb{C}$-VRe, A, B assoziative $\mathbb{C}$-Algebren mit 1. Ferner seien M_1 rechtes B-Modul, M_2 linkes B-Modul und M_1 linkes A-Modul mit der Eigenschaft*
$(am_1)b = a(m_1 b)$ $\forall a \in A, b \in B, m_1 \in M_1$. Dann definiere das **Tensorprodukt $M_1 \otimes_B M_2$ von M_1 und M_2** *durch: $M_1 \otimes_B M_2 := \frac{M_1 \otimes_{\mathbb{C}} M_2}{\langle m_1 b \otimes m_2 - m_1 \otimes b m_2 \rangle_{\mathbb{C}}}$.*
Führe auf $M_1 \otimes_B M_2$ $A-$Modulstruktur ein durch: $a(m_1 \otimes m_2) := (am_1) \otimes m_2$.

Im folgenden skizziere ich kurz, wie man einer auf h_0 reellwertigen, dominanten, algebraischen Integralform $\lambda \in h^*$ die gesuchte irreduzible, endl.dim. Darstellung zuordnet:
Nachdem aus $\mathbb{C}$ ein linkes $U(b)$-Modul $\mathbb{C}_{\lambda-\delta}$ gemacht wurde, kann man das zu λ gehörende **Verma-Modul $V(\lambda) := U(g) \otimes_{U(b)} \mathbb{C}_{\lambda-\delta}$** definieren, wobei es sich um ein linkes $U(g)$-Modul handelt. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll: $V_+(\lambda) := \bigoplus\limits_{\mu\neq\lambda-\delta} V(\lambda)_\mu$. Dann ist jedes eigentliche $U(g)$-Untermodul von $V(\lambda)$ in $V(\lambda)_+$ enthalten. Folglich ist die Summe S aller eigentlichen $U(g)$-Untermoduln ein eigentliches $U(g)$-Untermodul und $L(\lambda) := \frac{V(\lambda)}{S}$ ist ein irr. $U(g)$-Modul. Es gilt: $L(\lambda)$ ist Höchstgewichtsmodul mit Höchstgewicht $\lambda - \delta$. Damit gilt dann folgendes

Theorem 5.12 *Sei $\lambda \in h^*$ auf h_0 reelwertige, dominante, algebraische Integralform. Dann ist das irreduzible Höchstgewichtsmodul $L(\lambda + \delta)$ eine endl.-dim. Darstellung von g mit Höchstgewicht λ.*

Hiermit ist die Rückrichtung der Korrespondenz angegeben. Die andere Richtung ist einfacher: einer irr., endl.-dim. Darstellung wird ein Höchstgewichtsvektor λ zugeordnet. Einige der geforderten Eigenschaften folgen nun direkt aus Prop.5.6 ii). Für die übrigen Eigenschaften und weitere Details zu dieser Korrespondenz siehe Knapp ([3], S.274-290).

Proposition 5.13 *Sei g komplexe Lie-Algebra, und V irr., unitäres, linkes $U(g)$-Modul. Dann sind die einzigen $U(g)$-linearen Abbildungen $L : V \longrightarrow V$ die Skalare.*

Definition 5.14 *Sei g halbeinfach, B die Killing-Form. Sei $\{X_i\}$ Basis von g über $\mathbb{C}$, $\{\tilde{X}_i\}$ Dualbasis bzgl. B, d.h. $B(X_i, X_j) = \delta_{ij}$. Das* **Casimir-Element Ω** *ist definiert durch*
$\Omega = \sum_{i,j} B(X_i, X_j)\tilde{X}_i\tilde{X}_j$.

Proposition 5.15 *In einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra g ist das Casimir-Element Ω unabhängig von der Wahl der Basis definiert, und es gilt: Ω liegt im Zentrum $Z(g)$ von $U(g)$.*

Beispiel 5.16 *Für $g = sl(2, \mathbb{C})$ gilt mit den Bezeichnungen aus obigen Beispielen*
$\Omega = \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}ef + \frac{1}{4}fe$.

Theorem 5.17 *Sei ϕ komplex-lineare Darstellung einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra g auf einem endl.-dim. komplexen VR V. Dann ist V vollständig reduzierbar, d.h. es existieren invariante URe $U_1, .., U_r$ von V mit $V = U_1 \oplus .. \oplus U_r$ und die Einschränkungen von ϕ auf jedes dieser U_i ist irreduzibel.*

Literatur

[1] *Claude Chevalley,* Theory of Lie groups, 1946

[2] *William Fulton, Joe Harris,* Representation theory, a first course, 1991

[3] *Anthony W. Knapp,* Lie groups beyond an introduction, second edition 2002

[4] *Serge Lang,* Real and functional analysis, third edition 1993

[5] *Jean-Pierre Serre,* Complex semisimple Lie algebras, translated 1987

[6] *Barry Simon,* Representations of finite and compact groups,1996

[7] *Uwe Storch, Hartmut Wiebe,* Lehrbuch der Mathematik, Band 4, 2001

[8] *Frank W. Warner,* Foundations of differential manifolds and Lie groups, 1983