Aufgaben zur Topologie II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2017

Week 6 — Homology and cohomology computations due by: 31.5.2017

Exercise 6.1 (Mayer–Vietoris sequence in cohomology)
Let X be a topological space, let $U, V \subset X$ two open sets such that $X = U \cup V$, let $Z \subset U \cap V$ be a subspace and let $\mathbb{M}$ be an abelian group. Prove that there exists a Mayer-Vietoris exact sequence of the form

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(U \cap V, Z; \mathbb{M}) \longrightarrow H^n(X, Z; \mathbb{M}) \xrightarrow{(j_U^* - j_V^*)} H^n(U, Z; \mathbb{M}) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^n(U \cap V, Z; \mathbb{M}) \longrightarrow \ldots$$

Über abstrakte Topologie.

Von **Walther Mayer** in Wien.

Diese Arbeit heißt abstrakte Topologie, weil die Komplexe, von deren Eigenschaften gesprochen wird, keineswegs irgend welche geometrische Gebilde sein müssen, sondern abstrakte Dinge sind, die einem sechs Axiome umfassenden Systeme zu genügen haben.

Wenn also auf Anschaulichkeit auch Verzicht geleistet wurde, so gewinnen dadurch die Überlegungen und Resultate an Exaktheit.

Der erste Abschnitt definiert die wichtigsten Invarianten eines Komplexringes, wobei ich einen Komplex als Ring bezeichne, sobald ich ihn als Inbegriff seiner Ecken, ein- und mehrdimensionalen Seiten auffasse.

Im zweiten Abschnitt wird dann der Begriff eines Unterringes eines gegebenen Ringes erklärt und anschließend der Komplementring und Randring eines solchen Unterringes definiert. Diese Begriffe gestatten dann geometrische Probleme zu behandeln, was im dritten und vierten Abschnitte geschieht.

Im dritten Abschnitt wird das Problem der Unterteilung eines gegebenen kombinatorischen Komplexringes behandelt, und zwar das inverse Problem, unter welchen Umständen man gewisse Komplexe eines gegebenen Komplexringes zu einem Komplexe vereinigen darf, ohne die Homologiegruppen des Ringes zu verändern.

Der vierte Abschnitt behandelt einen Zusammensetzungssatz, nämlich die Frage nach den Homologiegruppen eines Ringes Σ, der als Summe zweier seiner Unterringe Σ_1 und Σ_2 gegeben ist. Von Interesse dürfte die Beziehung (96) zwischen den Bettischen Zahlen dieser Ringe sein.

Im zweiten Abschnitt wird ein Beweis einer Verallgemeinerung eines bekannten Poincaréschen Resultates skizziert.

In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte. In den vielen Gesprächen über dieses Gebiet hat mir Herr Vietoris eine Fülle Anregungen gegeben, für die ich ihm meinen besten Dank ausdrücke.

From Mayer: Über abstrakte Topologie, Seite 1. In this paper, Mayer proofs the exactness of the general Mayer-Vietoris sequence (without using the notion of exact sequences though).

In the next exercise you are allowed to use, without proof, that for a CW complex X the cohomology of the cellular cochain complex $C^\bullet(X;\mathbb{M}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(X);\mathbb{M})$ is isomorphic to the singular cohomology of X.

Exercise 6.2 (Cohomology of real projective spaces and Moore spaces)
(1) Compute the cohomology of $\mathbb{RP}^n$ with coefficients in $\mathbb{Z}/2$ and $\mathbb{Z}$.

(2) Let $m, n \geq 2$ and let $\psi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ be a map of degree m. Compute the cohomology of the *Moore space* $M(\mathbb{Z}/m, n) := C(\psi)$ with coefficients in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Z}/p$ for all prime numbers p. Here $C(\psi)$ stands for the mapping cone of ψ.

Jules Henri Poincaré, 29 April 1854 to 17 July 1912.

Exercise 6.3 (Properties of cohomology)
(1) Let X be a topological space and $\mathbb{M}$ an abelian group. Prove that the map

$$H^n(X;\mathbb{M}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X;\mathbb{Z});\mathbb{M})$$

$$[\alpha\colon S_n(X) \to \mathbb{M}] \mapsto [\alpha|\colon H_n(X) = Z_n/B_n \to \operatorname{Ker}(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1}) \to \mathbb{M}]$$

is well-defined for any cocycle α. It is surjective for all $n \in \mathbb{N}$. (By Exercise 6.4(2) it is in general not injective.)

(2) Consider the assignment $X \mapsto \operatorname{Hom}(H_n(X);\mathbb{Z})$ and $(X,A) \mapsto \operatorname{Hom}(H_n(X,A;\mathbb{Z});\mathbb{Z})$ for all $n \in \mathbb{N}$ and, respectively, all spaces X and all couples of spaces (X,A), with connecting homomorphisms $\operatorname{Hom}(H_{n-1}(A);\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(H_n(X,A);\mathbb{Z})$ induced by the corresponding connecting homomorphisms $H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$ in homology. Prove that this is not a cohomology theory. (Which axiom fails ?).

Exercise 6.4 (Cohomology in small dimension)
Let X be a topological space, $A \subset X$ a subspace and $\mathbb{M}$ an abelian group.

(1) Prove that construction from the previous exercise gives the following isomorphisms:

$$H^0(X, A; \mathbb{M}) \simeq \mathrm{Hom}(H_0(X, A; \mathbb{Z}); \mathbb{M});$$

$$H^1(X; \mathbb{M}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(X; \mathbb{Z}); \mathbb{M}).$$

Remark: the last isomorphism is quite difficult with the tools that you have seen so far, so it will be considered a "challenge" and will not be evaluated.

(2) Prove that $H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ is not injective.

(3) Let N be a countable discrete space. Compute $H_0(N; \mathbb{Z})$ and $H^0(N; \mathbb{Z})$. Are they isomorphic as abelian groups?
(4) Deduce from (1) that $H^1(X; \mathbb{Z})$ is always torsion-free. Give an example of a topological space Y with $H^1(Y) = 0$ and $H_1(Y) \neq 0$.

Exercise 6.5* (Example $H^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$)

Consider $X = \mathbb{S}^1$, $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ and denote the universal covering by $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. In this exercise we compute $H^1(X; \mathbb{R})$.

1. For a basis element $a\colon \Delta^1 = [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ of $S_1(\mathbb{S}^1)$ we define

$$\Phi(a) := \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) \in \mathbb{R}$$

   for any lift $\tilde{a}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ of a. This is a well-defined number. Then $\Phi\colon S_1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$ is a 1-cochain in $\mathbb{S}^1$, or $\Phi \in S^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$.

2. Show that Φ is a 1-cocycle.
   Hint: If $c\colon \Delta^2 \to \mathbb{S}^1$ is given, take a lift $\tilde{c}\colon \Delta^2 \to \mathbb{R}$ and we get $(\tilde{c}(2) - \tilde{c}(1)) - (\tilde{c}(2) - \tilde{c}(0)) + (\tilde{c}(1) - \tilde{c}(0)) = 0$.

3. Show that Φ is not a 1-coboundary.
   Hint: If $a\colon [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ is a closed curve, then $\Phi(a) = \deg(a)$ is an integer; and there are a with $\Phi(a) \neq 0$. But if $\beta \in S^0(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$, so β is any function $S_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ of sets then

$$\delta(\beta)(a) = \beta(\partial_0(a)) - \beta(\partial_1(a)) = \beta(a(1)) - \beta(a(0)) = 0$$

   for a closed curve a. Thus $\Phi \neq \delta(\beta)$ for any β.

4. Show that any two cocycles Φ_1, Φ_2 are proportional (up to a coboundary), i.e., colinear in the $\mathbb{R}$-vector space $S^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ modulo the sub vector space of coboundaries.

5. Conclude that $H^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ has dimension 1.

Mitteilung der Fachschaft Mathematik: Die Fachschaft Mathematik feiert am 1.6. ihre Matheparty in der *N8schicht*. Der Vorverkauf findet am Mo. 29.05., Di. 30.05. und Mi 31.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.