

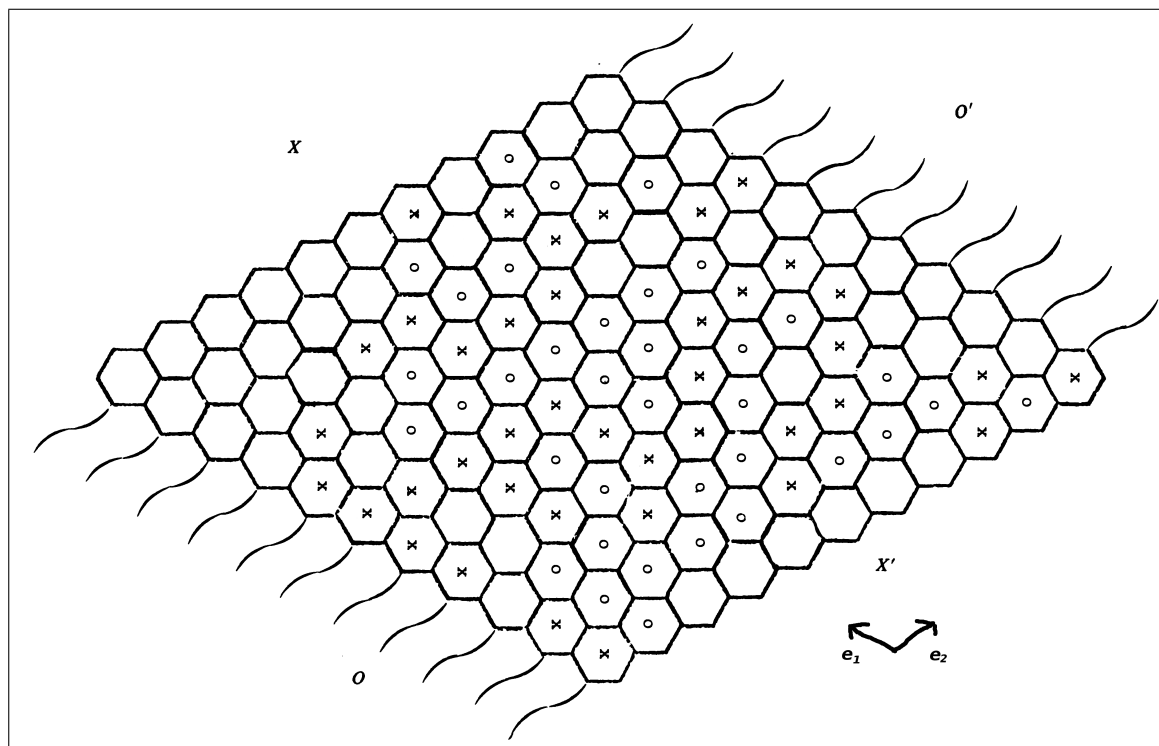
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 14

Abgabe: Mi, 1.2.2012, in der Vorlesung



Aus: *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*, David Gale.
The American Mathematical Monthly, Vol. 86, Nr. 10. (Dec. 1979), 818–827.

Aufgabe 66. (Fixpunktsatz von Brouwer)

Beweisen Sie den Fixpunktsatz von Brouwer (benannt nach Luitzen E. J. Brouwer, 1881–1966): Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ besitzt einen Fixpunkt. (Tipp: Angenommen, f hat keinen solchen Fixpunkt. Für jedes $x \in \mathbb{D}^n$ trifft die Verlängerung des Strahles von $f(x)$ nach x über x hinaus den Rand $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ in einem Punkt $r(x)$. Zeigen Sie, dass r stetig ist und $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}$. Folgern Sie, dass \mathbb{S}^{n-1} ein Retrakt von \mathbb{D}^n ist, und nutzen Sie dann Aufgabe 57 (b).)

Aufgabe 67. (Satz von Borsuk-Ulam)

In dieser Aufgabe sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Zudem sei $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle x .

- (a) Zeigen Sie, dass f einen Morphismus von Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{RP}^n & \longrightarrow & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

induziert.

- (b) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Natürlichkeit der Sequenz aus Aufgabe 52 (c), dass $f_*: H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ ein Isomorphismus ist.

- (c) Beweisen Sie nun den Satz von Borsuk-Ulam, benannt nach Stanisław Marcin Ulam (1909–1984) und Karol Borsuk (1905-1982): Für jede stetige Abbildung $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert ein $x \in \mathbb{S}^n$ mit $g(x) = g(-x)$. (Tipp: Wenn dies nicht der Fall ist, kann man

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$$

setzen und erhält eine Abbildung $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ mit $f(-x) = -f(x)$. Man wende (b) auf die Einschränkung von f auf den Äquator $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ an.)

Aufgabe 68. (Anwendungen)

- (a) Es sei $A = (a_{i,j})$ eine reelle $n \times n$ -Matrix mit $a_{i,j} \geq 0$ für alle i, j . Man zeige, dass A einen Eigenvektor $v = (v_1, \dots, v_n)$ besitzt mit $v_i \geq 0$ für alle i . (Für dieses Teilergebnis des Satzes von Perron und Frobenius kann man den Fixpunktsatz von Brouwer benutzen.)
- (b) Man zeige, dass es für $n > m$ keine stetige, injektive Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt. Insbesondere sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m für $n \neq m$ nicht homöomorph. (Eine Möglichkeit ist hier, den Satz von Borsuk-Ulam auf eine Komposition $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ anzuwenden.)

Aufgabe 69. (Satz vom Igel)

- (a) Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld auf \mathbb{S}^{2n} eine Nullstelle hat. (Tipp: Ansonsten gäbe es eine stetige Funktion $v: \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ derart, dass $v(x) \perp x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{2n}$. Dann ist $f_t(x) = \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) \cdot v(x)$ (für $t \in [0, 1]$) eine Homotopie von der Identität zur Antipodenabbildung. Nutzen Sie dann Aufgabe 62 (c).)
- (b) Angenommen, die Gruppe G wirkt frei auf \mathbb{S}^{2n} . Zeigen Sie, dass $|G| \leq 2$. (Tipp: Zeigen Sie ähnlich zu (a), dass für jedes nicht-triviale $g \in G$ die Abbildung $\mathbb{S}^{2n} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2n}$ homotop zur Antipodenabbildung sein muss. Betrachten Sie dann den Abbildungsgrad.)

***-Aufgabe 70.** (Das Spiel Hex)

Das *Spiel Hex* wird auf einem rhombenförmigen Brett mit $n \times n$ regelmäßigen Sechsecken als Feldern gespielt. Die Spieler setzen abwechselnd Steine ihrer Farbe auf das Feld (in der Grafik mit x und o gekennzeichnet). Jeder Spieler versucht, seine gegenüberliegenden Ränder durch Steine zu verbinden; in der Grafik versucht also Spieler \mathcal{O} , die mit O und O' gekennzeichneten Bereiche zu verbinden, und Spieler \mathcal{X} versucht dasselbe für die Bereiche X und X' . Wer sein Ziel zuerst erreicht, hat gewonnen. In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass das Spiel niemals unentschieden ausgehen kann.

Sei dazu B die Menge der Mittelpunkte der Spielfelder, und M die konvexe Hülle von B . Wir nehmen an, dass alle Felder belegt sind, ohne dass ein Spieler gewonnen hat, und bezeichnen mit $B_{\mathcal{O}} \subset B$ und $B_{\mathcal{X}} \subset B$ die Mittelpunkte der von \mathcal{O} bzw. \mathcal{X} besetzten Felder. Zudem seien $B_{O_1} \subset B$ die Mittelpunkte der zum Bereich O über \mathcal{O} -Steine verbundenen Felder; analog sei $B_{X_1} \subset B$ definiert. Schließlich sei $B_{O_2} = B_{\mathcal{O}} \setminus B_{O_1}$ und $B_{X_2} = B_{\mathcal{X}} \setminus B_{X_1}$. Mit e_1 und e_2 bezeichnen wir die in der Grafik eingezeichneten Richtungsvektoren.

- (a) Es sei $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ folgende Funktion:

$$b \mapsto \begin{cases} b + e_2 & \text{falls } b \in B_{O_1}, \\ b - e_2 & \text{falls } b \in B_{O_2}, \\ b - e_1 & \text{falls } b \in B_{X_1}, \\ b + e_1 & \text{falls } b \in B_{X_2}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(B) \subseteq B$. Die Menge M wird durch B in kleine gleichseitige Dreiecke zerlegt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Fortsetzung von f zu einer stetigen Funktion $g: M \rightarrow M$ gibt, die auf jedem dieser kleinen Dreiecke affin ist.

- (b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, also die konvexe Hülle dreier nicht-kollinearer Punkte $\{p, q, r\}$. Zudem sei $h: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Dann hat h genau dann einen Fixpunkt, wenn die konvexe Hülle der Punkte $h(p) - p$, $h(q) - q$ und $h(r) - r$ den Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ enthält.
- (c) Zeigen Sie, dass g keinen Fixpunkt hat, und leiten Sie mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Widerspruch her.