

# Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 13

Abgabe: Mi, 25.1.2012, in der Vorlesung

## Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe.

Von L. Vietoris in Wien.

Wir wollen hier die folgende Aufgabe lösen:

$\Sigma_1, \Sigma_2$  seien zwei kombinatorische Komplexe,  $\Sigma_3$  der Durchschnitt von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma$  die Vereinigung  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ . Wir fragen: Was muß man von den Homologiegruppen von  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  wissen, um die Homologiegruppen von  $\Sigma$  angeben zu können, und wie gibt man diese dann an?

W. Mayer, dem ich das Problem samt vermutungsweisen Angaben über Weg und Antwort mitgeteilt habe, hat das Problem in diesen Monatsheften, Bd. 36 (1929), S. 1—42 (insbesondere 31—42), soweit es sich auf die Bettischen Zahlen bezieht, auf zum Teil anderem Weg gelöst [Formel (96)]. Im folgenden will ich den von mir damals ins Auge gefaßten Gedankengang wieder aufgreifen und zur allgemeinen Lösung verwenden.

Aus: Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), Nr. 1, 159-162.

### Aufgabe 61. (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Es sei  $X = U \cup V$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  durch zwei Mengen  $U$  und  $V$ .

- (a) Wir bezeichnen mit  $S_n^{U,V}(X)$  denjenigen Untermodul von  $S_n(X)$ , der von allen singulären Simplizes  $\Delta^n \rightarrow X$  erzeugt wird, deren Bild ganz in  $U$  oder ganz in  $V$  liegt. Beweisen Sie, dass die Inklusionen  $i^U: U \cap V \rightarrow U$ ,  $i^V: U \cap V \rightarrow V$ ,  $j^U: S_n(U) \rightarrow S_n^{U,V}(X)$  und  $j^V: S_n(V) \rightarrow S_n^{U,V}(X)$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} S(i^U) \\ S(i^V) \end{pmatrix}} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j^U & -j^V \end{pmatrix}} S^{U,V}(X) \rightarrow 0$$

induzieren.

- (b) Folgern Sie aus (a), dass es eine natürliche exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_*^U \\ i_*^V \end{pmatrix}} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_*^U & -j_*^V \end{pmatrix}} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

gibt, die sogenannte *Mayer-Vietoris-Sequenz*, benannt nach Walther Mayer (1887–1948) und Leopold Vietoris (1891–2002).

- (c) Berechnen Sie mittels (b) die Homologie der  $n$ -Sphäre  $S^n$ , indem Sie diese in eine leicht vergrößerte obere und eine leicht vergrößerte untere Hemisphäre zerlegen.

### Aufgabe 62. (Abbildungsgrad)

Der *Abbildungsgrad* einer Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  ist definiert als die eindeutig bestimmte ganze Zahl  $d$ , für die die in ganzzahliger Homologie induzierte Abbildung  $f_*: H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  gegeben ist durch  $z \mapsto d \cdot z$ . Hierbei muss natürlich in beiden Fällen derselbe Isomorphismus  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  gewählt werden.

- (a) Es sei  $s : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  die Spiegelung an der Hyperebene  $z_{n+1} = 0$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Bestimmen Sie den Abbildungsgrad von  $s$  unter Verwendung der Natürlichkeit der Mayer-Vietoris-Sequenz aus Aufgabe 61. (Hinweis: Man sollte sich hier genau überlegen, wie der Randoperator in der Mayer-Vietoris-Sequenz aussieht.)
- (b) Nun sei  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine orthogonale Abbildung. Zeigen Sie, dass diese sich auf eine Selbstabbildung der  $\mathbb{S}^n$  einschränkt, und bestimmen Sie den Abbildungsgrad dieser Selbstabbildung. (Tipp: Falls  $\det(f) = 1$ , dann ist  $f$  homotop (in der Welt der orthogonalen Abbildungen) zur Identität. Falls  $\det(f) = -1$ , dann kann man  $s \circ f$  betrachten.)
- (c) Bestimmen Sie den Abbildungsgrad von  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  mit  $g(x) = -x$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$ .
- (d) Es sei nun  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine orthogonale Abbildung; geben Sie die induzierte Abbildung  $f_* : H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$  an.

**Aufgabe 63.** (Homologie des Abbildungskegels)

- (a) Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $C$  der Abbildungskegel von  $f$ . Man zeige, dass es eine lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(C) \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_n(C) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

gibt. (Tipp: Man definiere  $U$  als das Bild von  $X \times (0, 1]$  in  $C$  und  $V$  als das Komplement des Bildes von  $X \times \{1\}$  in  $C$ ; dann ist  $U \cap V \simeq X$  und man nutzt die Mayer-Vietoris-Sequenz. Alternativ kann man den Abbildungszylinder  $Z_f = X \times [0, 1] \cup_{X \times 0} Y$  betrachten; dann gilt gemäß eines Satzes aus der Vorlesung  $H_*(Z_f, X \times \{1\}) \cong \tilde{H}_*(Z_f/X \times \{1\}) \cong \tilde{H}_*(C)$ , und nun nutzt man die lange exakte Homologiesequenz.)

- (b) Berechnen Sie mit (a) die Homologie von  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ . (Tipp:  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  ist der Abbildungskegel der Abbildung  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$ .)

**Aufgabe 64.** (Homologie von Flächen)

Berechnen Sie für  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$

- (a) die Homologie einer zusammenhängenden Summe von Tori,
- (b) die Homologie einer zusammenhängenden Summe von projektiven Ebenen.

**\*-Aufgabe 65.** (Simpliziale und singuläre Homologie)

In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass für jede  $\Delta$ -Menge  $X$  die simpliziale Homologie von  $X$  und die singuläre Homologie der geometrischen Realisierung  $|X|$  isomorph sind. Wir bezeichnen mit  $S^{\text{simp}}(X)$  den simplizialen Kettenkomplex aus Aufgabe 35. Mit  $H_*(X)$  bezeichnen wir die Homologie dieses Komplexes; im Gegensatz dazu bezeichnet  $H_*(|X|)$  die singuläre Homologie des topologischen Raumes  $|X|$ .

- (a) Für  $x \in X_n$  definieren wir  $f_x : \Delta^n \rightarrow |X|$  als die Komposition  $\Delta^n \cong \{x\} \times \Delta^n \rightarrow \bigsqcup_{i \geq 0} X_i \times \Delta^i \rightarrow |X|$ . Beweisen Sie, dass die Zuordnung  $x \mapsto f_x$  eine Abbildung von Kettenkomplexen  $\Phi : S^{\text{simp}}(X) \rightarrow S(|X|)$  induziert. Von dieser wollen wir nun beweisen, dass Sie ein Quasiisomorphismus ist.

Es sei  $Y$  eine  $\Delta$ -Menge mit  $Y_i = \emptyset$  für  $i > n + 1$ ; zudem sei  $X \subset Y$  die Unter- $\Delta$ -Menge mit  $X_i = Y_i$  für  $i \leq n$  und  $X_{n+1} = \emptyset$ .

- (b) Man beweise, dass man eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $0 \rightarrow S^{\text{simp}}(X) \rightarrow S^{\text{simp}}(Y) \rightarrow \mathbb{K}Y_{n+1} \rightarrow 0$  hat. Es gilt  $H_i(X) \cong H_i(Y)$  für  $i \neq n, n + 1$ , und man hat eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{K}Y_{n+1} \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow 0.$$

- (c) Es sei  $U$  das Bild von  $Y_{n+1} \times \overset{\circ}{\Delta}^{n+1}$  in  $|Y|$ , und  $V$  sei das Komplement des Bildes von  $Y_{n+1} \times \{b\}$  in  $|Y|$ , wobei  $b \in \overset{\circ}{\Delta}^{n+1}$  den Baryzenter bezeichne. Man zeige, dass  $U \cap V \simeq Y_{n+1} \times \partial\overset{\circ}{\Delta}^{n+1}$  und  $V \simeq |X|$ . Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz zeige man  $H_i(|X|) \cong H_i(|Y|)$  für alle  $i \neq n, n + 1$ ; außerdem erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{n+1}(|X|) \rightarrow H_{n+1}(|Y|) \rightarrow \mathbb{K}Y_{n+1} \rightarrow H_n(|X|) \rightarrow H_n(|Y|) \rightarrow 0.$$

- (d) Geben Sie ein Diagramm an, das  $\Phi_*$  sowie die Sequenzen und Isomorphismen aus (b) und (c) in Beziehung setzt. Zeigen Sie: Wenn  $\Phi_*$  für  $X$  ein Isomorphismus ist, dann auch für  $Y$ .
- (e) Zeigen Sie nun, dass  $\Phi_*$  für jede  $\Delta$ -Menge  $X$  ein Isomorphismus ist.