

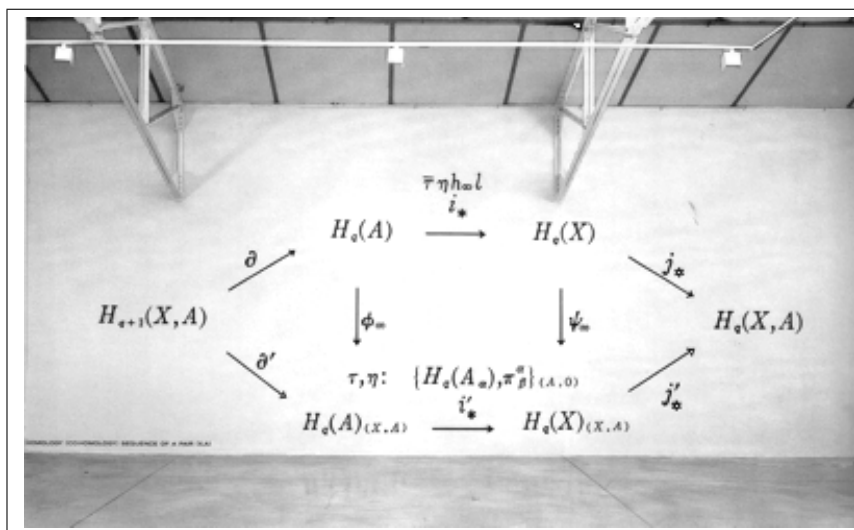
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 12

Abgabe: Mi, 18.1.2012, in der Vorlesung



Bernar Venet, Related to: The Homology (Cohomology) Sequence of a Pair (X,A). Wandgemälde, 2001

Aufgabe 56. (Zykeltest)

Es sei A ein Kettenkomplex und $a \in A_n$ ein Zykel. Es geht darum zu testen, ob a ein Rand ist oder nicht. Man betrachte den Kettenkomplex B mit $B_{n+1} = A_{n+1} \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle$ und $B_k = A_k$ für alle $k \neq n+1$ mit $\partial(b) = a$. Außerdem setze man $C = B/A$.

- An der langen exakten Homologiesequenz zu $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ lese man ab, ob a ein Rand ist oder nicht.
- Angenommen, $H_n B$ ist endlich erzeugt und frei. Zeigen Sie, dass auch $H_n A$ endlich erzeugt und frei ist. Wie kann man anhand der Ränge von $H_n A$ und $H_n B$ erkennen, ob a ein Rand ist?
- Angenommen, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ und $H_* B$ ist endlich erzeugt; zeigen Sie, dass auch $H_* A$ endlich erzeugt ist. Die Struktur (Rang und p -Torsion für alle Primzahlen p) von $H_* A$ und $H_* B$ sei bekannt; entscheiden Sie hiermit, welche Vielfachen von a Ränder sind.

Aufgabe 57. (Lange exakte Homologiesequenz eines Tripels, Retrakte und reduzierte Homologie)

- Es seien $X \supseteq Y \supseteq Z$ topologische Räume. Konstruieren Sie aus einer geeigneten kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen eine natürliche lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, Y) \rightarrow H_n(Y, Z) \rightarrow H_n(X, Z) \rightarrow H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(Y, Z) \rightarrow \cdots$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung δ_* als $H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow H_{n-1}(Y, Z)$ faktorisiert.

- Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Retrakt, d. h. es gibt eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$. Beweisen Sie, dass man für alle n eine spaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow 0$$

hat.

- (c) Es sei (X, x) ein punktierter Raum; wir definieren die *reduzierte Homologie* von X durch $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, \{x\})$. Beweisen Sie, dass es einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{H}_n(X) \cong \ker H_n(\epsilon)$ gibt, wobei $\epsilon: X \rightarrow *$ die konstante Abbildung ist. Insbesondere hängt die reduzierte Homologie nicht von der Wahl des Basispunktes ab. Zeigen Sie außerdem, dass $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$ für alle $n \geq 1$.
- (d) Es sei $Y \subset X$ ein Teilraum von X und $x \in Y$ ein Basispunkt. Konstruieren Sie mittels (a) eine lange exakte Homologiesequenz, welche die Gruppen $\tilde{H}_n(X)$, $\tilde{H}_n(Y)$ und $H_n(X, Y)$ in Beziehung setzt.

Aufgabe 58. (Einhängungsisomorphismus)

Für jeden Raum X ist die Einhängung ΣX definiert als der Quotient

$$X \times [0, 1] / \{(x_1, i) \sim (x_2, i) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X \text{ und } i = 0, 1\}.$$

Beweisen Sie, dass $H_{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{H}_n(X)$ für alle $n \geq 0$.

Tipp: Sei CX das Bild von $X \times [0, \frac{1}{2}]$ in ΣX , und $C'X$ sei das Bild von $X \times [0, \frac{1}{3}]$. Zeigen Sie, dass CX zusammenziehbar ist. Die lange exakte Homologiesequenz liefert eine Beziehung zwischen $H_*(\Sigma X)$ und den relativen Homologiegruppen $H_*(\Sigma X, CX)$. Benutzen Sie dann die Ausschneidung von $C'X$.

Aufgabe 59. (Relative Homologie versus Homologie des Quotienten)

Es sei Y die reelle Gerade mit zwei Ursprüngen (siehe Aufgabe 13), und $A \subset Y$ sei die Menge dieser beiden Ursprünge, also das Bild von $\{0\} \times \{0, 1\}$. Bestimmen Sie $H_1(Y, A)$ und $H_1(Y/A)$.

***-Aufgabe 60.** (Topologisches Künneth-Theorem, schwache Version)

Die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Top} \times \text{Top}$ hat als Objekte die Paare (A, B) von topologischen Räumen, und als Morphismen $(A, B) \rightarrow (A', B')$ die Paare (f, g) von Morphismen $f: A \rightarrow A'$ und $g: B \rightarrow B'$.

- (a) Es seien X und Y augmentierte Kettenkomplexe; zeigen Sie, dass $X \otimes Y$ auf kanonische Weise wieder ein augmentierter Kettenkomplex ist. Wenn X und Y azyklisch sind, dann auch $X \otimes Y$ (Tipp: Man wende Aufgabe 53 (e) auf die Augmentationen an).
- (b) Beweisen Sie, dass $F: (X, Y) \mapsto S(X \times Y)$ und $G: (X, Y) \mapsto S(X) \otimes S(Y)$ Funktoren von \mathcal{C} nach Ch_{aug} sind.
- (c) Es sei $\mathcal{M}_1 = \{(\Delta^i, \Delta^j)\}_{i, j \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{M}_2 = \{(\Delta^n, \Delta^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilmengen der Objekte von \mathcal{C} . Beweisen Sie, dass F und G azyklisch sind auf \mathcal{M}_1 . Zeigen Sie, dass F frei ist auf \mathcal{M}_2 , und dass G frei ist auf \mathcal{M}_1 .
- (d) Folgern Sie, dass es eine natürliche Kettenäquivalenz $F \rightarrow G$ gibt, die eindeutig ist bis auf natürliche Homotopie. Zeigen Sie dann, dass $H_*(X \times Y) \cong H_*(X) \otimes H_*(Y)$ für topologische Räume X, Y , sofern \mathbb{K} ein Körper ist.