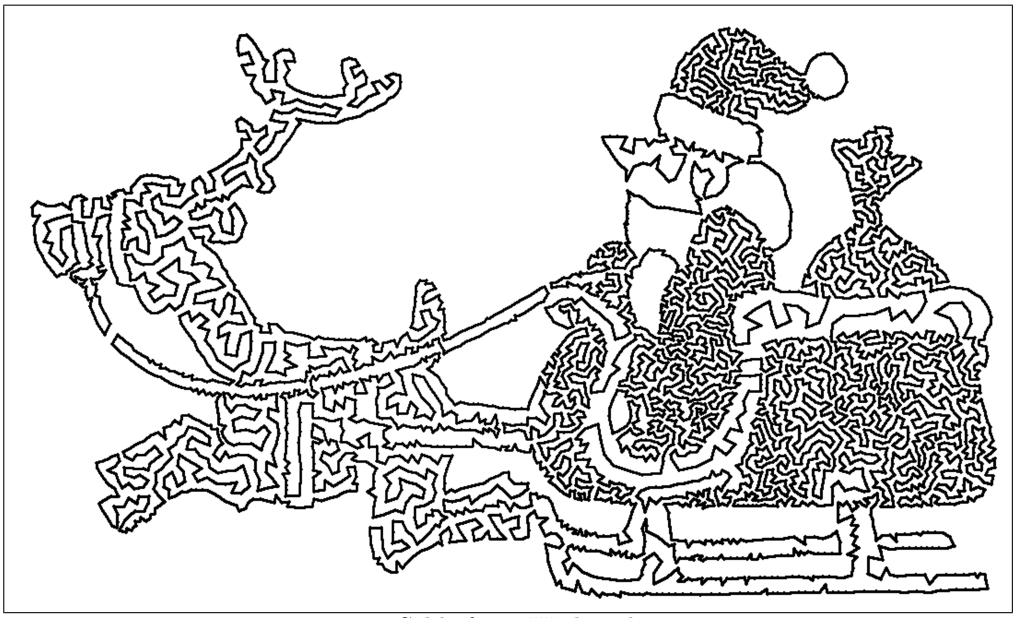
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 11 Abgabe: Mi, 11.1.2012, in der Vorlesung



Eine Schleife zu Weihnachten

Aufgabe 51. (Simpliziale Homologie für Sphären)
Es sei $D = \Delta^{n+1}$ das Standard-$(n+1)$-Simplex, aufgefasst als Simplizialkomplex; ferner sei $S = \partial D$ der Rand von D.

(a) Beweisen Sie, dass die Inklusion $S \hookrightarrow D$ eine injektive Abbildung der zugehörigen *simplizialen* Kettenkomplexe $i : S^{\mathrm{simp}}(S) \hookrightarrow S^{\mathrm{simp}}(D)$ induziert.

(b) Berechnen Sie die Homologie von $\mathrm{coker}(i)$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der langen exakten Homologiesequenz die Homologie von $\mathbb{S}^n$.

Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die simpliziale und die singuläre Homologie eines Simplizialkomplexes übereinstimmen.

Aufgabe 52. (Beispiel für Transfer)
Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und X sei ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit universeller Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ und $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Beweisen Sie, dass es zu jedem singulären n-Simplex $f\colon \Delta^n \to X$ genau zwei singuläre n-Simplizes $f_1, f_2\colon \Delta^n \to \tilde{X}$ gibt mit $p \circ f_i = f$. Wir definieren die lineare Abbildung $\mathrm{Tr}\colon S_n(X) \to S_n(\tilde{X})$ durch $(f) \mapsto (f_1) + (f_2)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}\colon S(X) \to S(\tilde{X})$ eine Kettenabbildung ist.

(b) Beweisen Sie, dass $0 \to S(X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} S(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} S(X) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist.

(c) Folgern Sie, dass man eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \to H_n(X) \to H_n(\tilde{X}) \to H_n(X) \to H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(\tilde{X}) \to \ldots$$

hat, und berechnen Sie damit $H_*(\mathbb{RP}^k)$.

Aufgabe 53. (Algebraisches Künneth-Theorem, schwache Version)
Es seien A, B, X und Y *freie* Kettenkomplexe über $\mathbb{K}$, $f\colon A \to B$ und $g\colon X \to Y$ seien Kettenabbildungen. Wir fassen die Homologie eines Kettenkomplexes als Kettenkomplex mit trivialem Differential auf. Beweisen Sie:

(a) Für den Abbildungskegel der Kettenabbildung $f \otimes X\colon A \otimes X \to B \otimes X$ mit $a \otimes x \mapsto f(a) \otimes x$ gilt $C(f \otimes X) \cong C(f) \otimes X$.

(b) Wenn Y azyklisch ist, dann ist Y zusammenziehbar.

(c) Wenn Y azyklisch ist, dann ist auch $Y \otimes X$ azyklisch.

(d) Wenn f ein Quasiisomorphismus ist, dann ist auch $f \otimes X$ ein Quasiisomorphismus. (Tipp: f ist genau dann ein Quasiisomorphismus, wenn $C(f)$ azyklisch ist.)

(e) Wenn $f\colon A \to B$ und $g\colon X \to Y$ Quasiisomorphismen sind, dann auch $f \otimes g\colon A \otimes X \to B \otimes Y$.

(f) Wenn $\mathbb{K}$ ein Körper ist, dann gibt es einen Quasiisomorphismus $H_*A \to A$, und es gilt $H_*(A \otimes B) \cong H_*A \otimes H_*B$.

Aufgabe 54. (Abbildungskegel von Δ-Mengen)
In dieser Aufgabe werden wir sehen, warum man den Abbildungskegel von Kettenkomplexen so definiert wie in der Vorlesung beschrieben. Gegeben sind Δ-Mengen X und Y. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von Δ-Mengen ist eine Folge $f_n\colon X_n \to Y_n$ von Abbildungen mit der Eigenschaft $f_n \circ d_i = d_i \circ f_{n+1}$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le i \le n+1$.

(a) Beweisen Sie, dass ein solches f eine stetige Abbildung $|f|\colon |X| \to |Y|$ auf den geometrischen Realisierungen induziert.

Wir definieren nun den *Abbildungskegel von f* durch $C_n = Y_n \sqcup X_{n-1}$ für $n \ge 1$ und $C_0 = Y_0 \sqcup \{*\}$. Die Randabbildungen $C_n \to C_{n-1}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
d_i^C(y) &= d_i^Y(y) && \text{für } y \in Y_n \text{ und } i = 0, 1, \dots, n,\\
d_0^C(x) &= f(x) && \text{für } x \in X_{n-1},\\
d_i^C(x) &= d_{i-1}^X(x) && \text{für } n > 1,\ x \in X_{n-1} \text{ und } i = 1, 2, \dots, n,\\
d_1^C(x) &= * && \text{für } n = 1 \text{ und } x \in X_0.
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass C eine Δ-Menge ist und $|C| \cong C(|f|)$.

Für jede Δ-Menge X bezeichnen wir nun mit $\hat{S}(X)$ denjenigen Kettenkomplex, der in nicht-negativen Graden wie in Aufgabe 35 definiert ist; außerdem ist $\hat{S}(X)_{-1} = \mathbb{K}$, und $\partial : \hat{S}(X) \to \hat{S}(X)_{-1}$ bildet jeden Erzeuger im Grad 0 auf den Erzeuger im Grad -1 ab.

(c) Zeigen Sie: f induziert eine Abbildung $\hat{S}(f)\colon \hat{S}(X) \to \hat{S}(Y)$, deren Abbildungskegel isomorph ist zu $\hat{S}(C)$.

***-Aufgabe 55.** (Simpliziale Linsenräume)
Es seien n, k teilerfremde natürliche Zahlen. Wir definieren eine Δ-Menge X wie folgt: die 0-Simplizes sind $X_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$, wobei wir die Indizes „modulo n" betrachten (also insbesondere $a_n = a_0$ und $b_n = b_0$). Zudem sei

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{(a_i, a_{i+1}), (b_i, b_{i+1}), (a_i, b_j)\}_{i,j=0,1,\dots,n-1}\\
X_2 &= \{(a_i, a_{i+1}, b_j), (a_i, b_j, b_{j+1})\}_{i,j=0,1,\dots,n-1}\\
X_3 &= \{(a_i, a_{i+1}, b_j, b_{j+1})\}_{i,j=0,1,\dots,n-1}
\end{aligned}$$

Die Randabbildung $d_s : X_t \to X_{t-1}$ lässt hierbei von einem $(t+1)$-Tupel den $(s+1)$-sten Eintrag weg.

(a) Zeigen Sie, dass X eine Δ-Menge ist, deren geometrische Realisierung $|X|$ homöomorph zu $\mathbb{S}^3$ ist. (Tipp: man bilde a_j auf $(e^{\frac{2\pi i j}{n}}, 0)$ und b_j auf $(0, e^{\frac{2\pi i j}{n}})$ in $\mathbb{C}^2$ ab.)

(b) Zeigen Sie, dass die Operation $a_i \mapsto a_{i+1}$, $b_j \mapsto b_{j+k}$ eine $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Wirkung auf X beschreibt (in dem Sinne, dass die Gruppenwirkung und die Δ-Mengen-Struktur verträglich sind); folgern Sie, dass X/G wieder eine Δ-Menge ist.

(c) Beweisen Sie, dass die G-Wirkung auf X eine G-Wirkung auf $|X|$ induziert, die der G-Wirkung auf $\mathbb{S}^3$ von Aufgabe 17 entspricht. Folgern Sie, dass $|X/G|$ der Linsenraum $L(n, k)$ ist, und berechnen Sie seine Homologie.