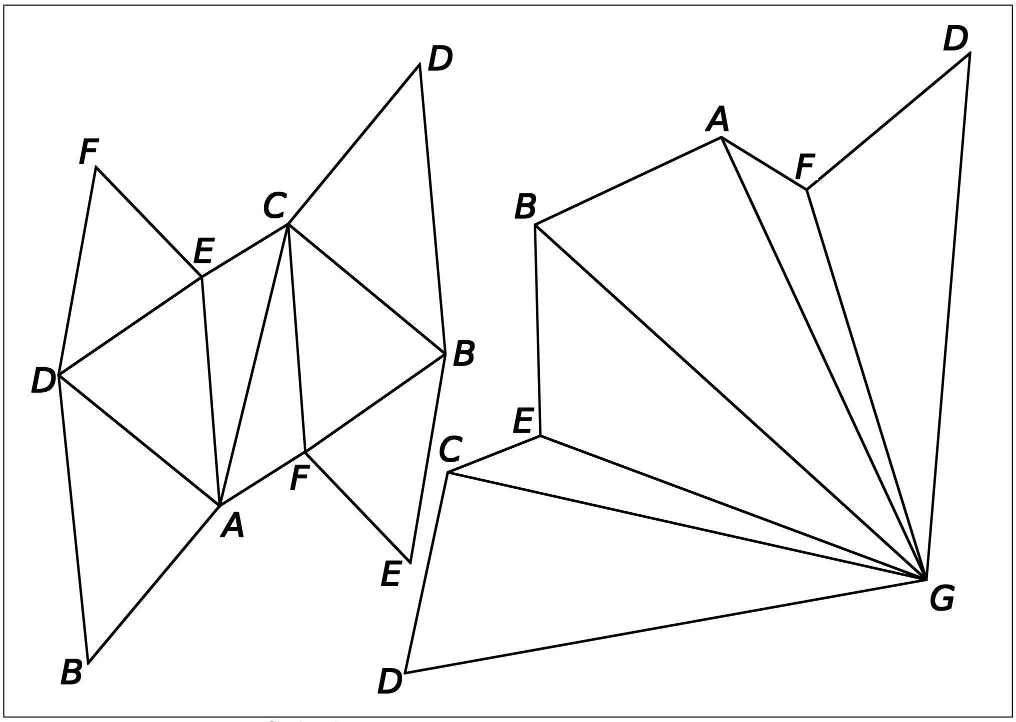
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 10 Abgabe: Mi, 21.12.2011, in der Vorlesung



Netz des Császár Polyeders, eines Polyeders ohne Diagonalen

Aufgabe 46. (Homologie via Δ-Mengen)
Es sei X eine Δ-Menge im Sinne von Aufgabe 35 (wir verwenden in dieser Aufgabe auch die Notation von dort, die leider nicht mit der Notation der Vorlesung übereinstimmt). Die *geometrische Realisierung* von X sei der Raum

$$|X| = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n / \sim,$$

wobei $\sim$ diejenige Äquivalenzrelation ist, die von den Relationen $(x, \delta_i(\lambda)) \sim (d_i x, \lambda)$ für alle $x \in X_n$, $\lambda \in \Delta^{n-1}$ und $i = 0, 1, \ldots, n$ erzeugt wird. Hierbei steht $\delta_i \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ für die Inklusion der i-ten Seite.

(a) Beweisen Sie, dass durch

$$\begin{array}{llll} Y_0 = \{a_0\}, & Y_1 = \{b_0, b_1, b_2\}, & Y_2 = \{c_0, c_1\}, & Y_i = \emptyset \text{ für alle } i > 2, \\ d_i(b_j) = a_0, & d_i(c_1) = b_i, & & \\ d_0(c_0) = b_1, & d_1(c_0) = b_2, & d_2(c_0) = b_0 & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{llll} Z_0 = \{a_0, a_1\}, & Z_1 = \{b_0, b_1, b_2\}, & Z_2 = \{c_0, c_1\}, & Z_i = \emptyset \text{ für alle } i > 2, \\ d_i(b_j) = a_i \text{ für } j = 0, 1, & d_i(b_2) = a_1, & d_2(c_i) = b_2, & \\ d_i(c_1) = b_i \text{ für } i = 0, 1, & d_i(c_0) = b_{1-i} \text{ für } i = 0, 1. & & \end{array}$$

zwei Δ-Mengen gegeben sind. Welche Ihnen bekannten topologischen Räume sind zu $|Y|$ bzw. $|Z|$ homöomorph?

(b) Einer Δ-Menge X haben wir in Aufgabe 35 einen Kettenkomplex zugeordnet; dessen Homologie bezeichnen wir mit $H_*^{\mathrm{simp}}(X)$. Wir werden später sehen, dass $H_*^{\mathrm{simp}}(X) \cong H_*(|X|)$. Berechnen Sie damit $H_*(|Y|)$ und $H_*(|Z|)$. (Hinweis: Sie dürfen $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ annehmen.)

Aufgabe 47. (Baryzentrische Unterteilung)
Man betrachte die affine Abbildung $b\colon \Delta^n \to \Delta^n$ mit $b(e_k) = e_0 + e_1 + \dots + e_k$ für $k = 0, \dots, n$. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_{n+1}$ operiert auf Δ^n durch die Vorschrift $\sigma_\bullet(t_0, \dots, t_n) = (t_{\sigma(0)}, \dots, t_{\sigma(n)})$, und wir setzen

$$b^\sigma\colon \Delta^n \to \Delta^n, \quad b^\sigma(t) = \sigma_\bullet b(t).$$

Man definiere $B^\sigma\colon S_n(X) \to S_n(X)$ durch $B^\sigma(\alpha) = \alpha \circ b^\sigma$, und $B\colon S_n(X) \to S_n(X)$ durch $B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \operatorname{sign}(\sigma) B^\sigma$.

(a) Man zeige, dass B eine Kettenabbildung ist, also $\partial \circ B = B \circ \partial$.

(b) Man zeige, dass B Kettenhomotop zur Identität von $S(X)$ ist.

Aufgabe 48. (Császár-Polyeder)
Das *Császár-Polyeder* ist neben dem Tetraeder das einzige bekannte Polyeder ohne Diagonalen (das heißt, je zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden). Eine Bastelanleitung für die Oberfläche ist in der Grafik gegeben; dabei sind gleich bezeichnete Ecken sowie entsprechende Kanten zwischen gleich bezeichneten Ecken zu verkleben. Wenn Sie dies praktisch durchführen, erhalten Sie einen 2-dimensionalen simplizialen Komplex im 3-dimensionalen Raum. Berechnen Sie die Homologie dieser Polyederoberfläche.
Tipp: Für H_0 und H_1 ist es hilfreich, sich zu überlegen, zu welchem Ihnen bekannten Raum die Polyederoberfläche homöomorph ist. Außerdem dürfen Sie ohne Nachweis verwenden, dass $H_*(|X|) \cong H_*^{\mathrm{simp}}(X)$ für Δ-Mengen X.

Aufgabe 49. (Singuläre Homologie und Kolimes)
Es sei X ein topologischer Raum und $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$ eine Folge von Teilräumen derart, dass jede kompakte Teilmenge von X komplett in einem X_i enthalten ist. Man zeige, dass $H_*(X) \cong \varinjlim H_*(X_i)$. Tipp: Man zeige $S(X) \cong \varinjlim S(X_i)$ und nutze Aufgabe 40.

***-Aufgabe 50.** (Normalisierter Kettenkomplex)
Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le i \le n$ definieren wir die i-te Ausartungsabbildung $\sigma_i\colon \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ als diejenige affine Abbildung mit

$$\sigma_i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{für } j \le i, \\ e_{j-1} & \text{für } j > i. \end{cases}$$

Ferner definieren wir $s_i\colon S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ durch $\alpha \mapsto \alpha \circ \sigma_i$. Schließlich definieren wir $D_n(X) \subseteq S_n(X)$ als den $\mathbb{K}$-Untermodul erzeugt von $\bigcup_{i=0}^n s_i(S_{n-1}(X))$.

(a) Beweisen Sie die Relation $\partial_i s_j = s_{j-1}\partial_i$ für $i < j$. Überlegen Sie sich, dass die *simplizialen Relationen*

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j &= \partial_{j-1}\partial_i & i &< j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i & i &\le j \end{aligned} \qquad \partial_i s_j = \begin{cases} \mathrm{id} & i = j, j+1 \\ s_{j-1}\partial_i & i < j \\ s_j \partial_{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

gelten; der Nachweis dieser Relationen ist hier jedoch nicht verlangt.

(b) Zeigen Sie, dass $D(X)$ ein Unterkomplex von $S(X)$ ist. Wir definieren den *normalisierten Kettenkomplex* $N(X)$ als den Quotientenkomplex $S(X)/D(X)$; $\xi\colon S(X) \to N(X)$ sei die Projektionsabbildung.

(c) Wir definieren $\tilde\eta_n\colon S_n(X) \to S_n(X)$ als die Komposition

$$\tilde\eta_n = (\mathrm{id} - s_0\partial_1) \circ (\mathrm{id} - s_1\partial_2) \circ \dots \circ (\mathrm{id} - s_{n-1}\partial_n).$$

Beweisen Sie, dass $\tilde\eta$ eine Kettenabbildung ist, die auf $D(X)$ verschwindet; also induziert sie eine Kettenabbildung $\eta\colon N(X) \to S(X)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\xi\eta = \mathrm{id}$, und dass $\eta\xi$ kettenhomotop zur Identität von $S(X)$ ist (Tipp: azyklische Modelle).

Insbesondere sind $S(X)$ und $N(X)$ natürlich kettenäquivalent.