

Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 9

Abgabe: Mi, 14.12.2011, in der Vorlesung

AXIOMATIC APPROACH TO HOMOLOGY THEORY

BY SAMUEL EILENBERG AND NORMAN E. STEENROD

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF MICHIGAN

Communicated February 21, 1945

1. Introduction.—The present paper provides a brief outline of an axiomatic approach to the concept: homology group. It is intended that a full development should appear in book form.

The usual approach to homology theory is by way of the somewhat complicated idea of a complex. In order to arrive at a purely topological concept, the student of the subject is required to wade patiently through a large amount of analytic geometry. Many of the ideas used in the constructions, such as orientation, chain and algebraic boundary, seem artificial. The motivation for their use appears only in retrospect.

Since, in the case of homology groups, the definition by construction is so unwieldy, it is to be expected that an axiomatic approach or definition by properties should result in greater logical simplicity and in a broadened point of view. Naturally enough, the definition by construction is not eliminated by the axiomatic approach. It constitutes an existence proof or proof of consistency.

Aus: Proc. Nat. Acad. of Sci. 1945, 31(4): 117-120.

Aufgabe 41. (Erste Homologiegruppen via Fundamentalgruppe)

- Es sei K die Kleinsche Flasche; berechnen Sie $H_1(K)$. Durch die Grafik in Aufgabe 22 sind zwei Abbildungen $K \rightarrow K$ gegeben; berechnen Sie die induzierten Abbildungen $H_1(K) \rightarrow H_1(K)$.
- Es sei $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus und $A = \{(x, y) \in T \mid x = 1 \text{ oder } y = 1\}$. Berechnen Sie $H_1(A)$ und $H_1(T)$ sowie die von der Inklusion $A \hookrightarrow T$ induzierte Abbildung.
- In der Grafik von Aufgabe 24 ist eine Überlagerung $p: X \rightarrow Y$ gegeben. Berechnen Sie $H_1(X)$ und $H_1(Y)$ sowie den Kokern der Abbildung $H_1(p)$. (Hinweis: Hierfür muss man die Abbildung $H_1(p)$ nicht konkret angeben. Kann man aber natürlich, wenn man will.)

Aufgabe 42. (Simplizes halbieren)

In dieser Aufgabe bezeichnen wir für Punkte p_0, p_1, \dots, p_k in Δ^n mit (p_0, p_1, \dots, p_k) diejenige affine Abbildung $\Delta^k \rightarrow \Delta^n$, welche $e_i \in \Delta^k$ auf p_i abbildet für $i = 0, 1, \dots, k$. Mit $\partial\Delta^n$ bezeichnen wir die Vereinigung der Seitenflächen von Δ^n , aufgefasst als Teilraum.

- Beweisen Sie, dass durch $z = (e_1, e_2, e_3) - (e_0, e_2, e_3) + (e_0, e_1, e_3) - (e_0, e_1, e_2)$ ein Zykel in $S_2(\partial\Delta^3)$ gegeben ist; die zugehörige Homologieklassse bezeichnen wir mit $\zeta \in H_2(\partial\Delta^3)$. Beweisen Sie, dass $i_*\zeta = 0$, wobei $i: \partial\Delta^3 \hookrightarrow \Delta^3$ die Inklusion ist.
- Es sei $m = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ der Mittelpunkt der Kante e_1e_2 . Beweisen Sie, dass z homolog ist zu $(e_0, e_2, m) - (e_0, e_1, m) + (e_1, m, e_3) - (e_2, m, e_3) + (e_0, e_1, e_3) - (e_0, e_2, e_3)$. Skizzieren Sie geometrisch, was hier passiert.
- Es sei $f: \partial\Delta^3 \rightarrow \partial\Delta^3$ die Einschränkung der Abbildung (e_0, e_2, e_1, e_3) auf $\partial\Delta^3$. Beweisen Sie, dass dann $f_*\zeta = -\zeta$.

Aufgabe 43. (Augmentierte Kettenkomplexe)

Ein *augmentierter Kettenkomplex* ist ein nicht-negativer Kettenkomplex C zusammen mit einer Kettenabbildung $\varepsilon: C \rightarrow \mathbb{K}[0]$, welche *Augmentation* genannt wird. Ein augmentierter Kettenkomplex heißt *azyklisch*, wenn ε ein Quasiisomorphismus ist. Ein Morphismus von augmentierten Kettenkomplexen $(C, \varepsilon) \rightarrow (C', \varepsilon')$ ist eine Kettenabbildung $f: C \rightarrow C'$ mit $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$. Die Kategorie der augmentierten Kettenkomplexe nennen wir Ch_{aug} .

- (a) Beweisen Sie: Es gibt genau eine Möglichkeit, den singulären Kettenkomplex S_* so zu einem Funktor $\text{Top} \rightarrow \text{Ch}_{\text{aug}}$ zu machen, dass $(\text{id}_{\Delta^0}) \in S_0(\Delta^0)$ durch ε auf $1 \in \mathbb{K}$ abgebildet wird.
- (b) Einem augmentierten Komplex C können wir einen Komplex \hat{C} zuordnen, indem wir $\hat{C}_n = C_n$ für alle $n \geq 0$, $C_{-1} = \mathbb{K}$ und $\partial_0 = \varepsilon: \hat{C}_0 \rightarrow \hat{C}_{-1}$ setzen. Man zeige, dass C genau dann azyklisch ist, wenn $H_*\hat{C} = 0$ ist.
- (c) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere konvexe Teilmenge. Man gebe explizit eine Kettenkontraktion von $\hat{S}_*(A)$ an; insbesondere ist also $S_*(A)$ azyklisch. (Tipp: Es sei $a \in A$ fest; man wähle beispielsweise eine Kontraktion, die das singuläre n -Simplex $f: \Delta^n \rightarrow A$ auf die folgende Abbildung $\Delta^{n+1} \rightarrow A$ schickt:
 $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (1 - x_{n+1}) \cdot f\left(\frac{1}{1-x_{n+1}}(x_0, \dots, x_n)\right) + x_{n+1} \cdot a.$)

Aufgabe 44. (Abspalten von Komplexen)

Es sei C ein Kettenkomplex, und für alle n sei $C_n = A_n \oplus B_n$; das Differential $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ habe die Matrixgestalt

$$d_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$, $\beta_n: B_n \rightarrow A_{n-1}$ und $\gamma_n: A_n \rightarrow B_{n-1}$ beliebige Abbildungen sind, aber B mit den Homomorphismen $\delta_n: B_n \rightarrow B_{n-1}$ ein Kettenkomplex sei.

Man zeige: Ist B zusammenziehbar mit der Zusammenziehung $h_n: B_n \rightarrow B_{n+1}$, dann ist

- (a) $\partial_n := \alpha_n - \beta_n \circ h_{n-1} \circ \gamma_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ ein Differential, und
- (b) $(\text{id}_{A_n}, -h_{n-1} \circ \gamma_n): A_n \rightarrow A_n \oplus B_n$ ist ein Quasiisomorphismus $A \rightarrow C$.

***-Aufgabe 45.** (Azyklische Modelle)

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und \mathcal{M} eine Menge von Objekten in \mathcal{C} (die sogenannten *Modelle*), und es sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_{\text{aug}}$ ein Funktor. Dann heißt F *azyklisch* (auf \mathcal{M}), wenn für alle $M \in \mathcal{M}$ der Komplex $F(M)$ azyklisch ist. Der Funktor F heißt *frei* (auf \mathcal{M}), wenn es eine Familie $\{M_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ (für eine Indexmenge \mathcal{A}) von Objekten $M_a \in \mathcal{M}$ und für jedes $a \in \mathcal{A}$ ein $m_a \in F(M_a)$ derart gibt, dass für alle $X \in \mathcal{C}$ die Menge $\{F(f)(m_a) \mid a \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{C}(M_a, X)\}$ eine Basis für $F(X)$ ist.

- (a) Es sei $\mathcal{C} = \text{Top}$ und $\mathcal{M} = \{\Delta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie, dass der Funktor $S_*: \text{Top} \rightarrow \text{Ch}_{\text{aug}}$ frei und azyklisch auf \mathcal{M} ist. Zeigen Sie außerdem, dass der Funktor $S_*(- \times I): \text{Top} \rightarrow \text{Ch}_{\text{aug}}$ azyklisch ist.

Für eine Kategorie \mathcal{C} mit Modellen \mathcal{M} seien nun zwei Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_{\text{aug}}$ gegeben. Der Funktor F sei frei, der Funktor G sei azyklisch.

- (b) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Transformation $\eta: F \rightarrow G$ gibt, das heißt für jedes $X \in \mathcal{C}$ hat man eine Abbildung $\eta_X: F(X) \rightarrow G(X)$ von augmentierten Kettenkomplexen so, dass für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} die Gleichung $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$ gilt.

Tipp: Angenommen, für alle X wurde η_X bereits im Grad $0, 1, \dots, n-1$ definiert. Für alle m_a im Grad n betrachte man $\eta_{M_a}(\partial m_a) \in G(M_a)$ und zeige, dass dies ein Zykel ist; wegen Azyklizität von G ist dies also gleich ∂b_a für geeignetes $b_a \in G(M_a)$ vom Grad n . Nun nutze man diese Elemente, um η im Grad n auf der gewählten Basis von $F(X)$ zu definieren für alle X .

- (c) Beweisen Sie, dass je zwei natürliche Transformationen $F \rightarrow G$ natürlich kettenhomotop zueinander sind.
- (d) Die Inklusionen i_0, i_1 induzieren natürliche Transformationen $S_* \rightarrow S_*(- \times I)$. Folgern Sie aus (a) und (c), dass homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen kettenhomotope Abbildungen der zugehörigen singulären Kettenkomplexe induzieren.