Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 8 Abgabe: Mi, 7.12.2011, in der Vorlesung

Aus: Finite simple group (of order 2), *The Klein Four Group*

Aufgabe 36. (Abbildungskegel)

(a) Man zeige: Wenn $f, f' \colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen von Kettenkomplexen sind, dann sind die Abbildungskegel $C(f)$ und $C(f')$ isomorph.

(b) Man zeige: Wenn $f \colon X \to Y$ ein Monomorphismus von Kettenkomplexen ist, dann gibt es einen Quasiisomorphismus $C(f) \to \operatorname{coker} f$. (Tipp: Konstruieren Sie eine naheliegende surjektive Abbildung und zeigen Sie, dass ihr Kern azyklisch ist.) Wenn $f \colon X \to Y$ ein Epimorphismus von Kettenkomplexen ist, dann gibt es einen Quasiisomorphismus $\Sigma \ker f \to C(f)$.

(c) Es sei $f \colon X \to Y$ ein Morphismus von Kettenkomplexen. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_{n+1} \operatorname{coker} f \to H_{n-1} \ker f \to H_n C(f) \to H_n \operatorname{coker} f \to H_{n-2} \ker f \to H_{n-1} C(f) \to \dots$$

gibt. (Eine Möglichkeit ist wie folgt: Sei U das Bild von f als Unterkomplex von Y; $s \colon X \to U$ die von f induzierte Surjektion. Konstruieren Sie aus der Inklusion $U \hookrightarrow Y$ einen Monomorphismus $C(s) \to C(f)$ mit Kokern $\operatorname{coker} f$. Dann kann man (b) benutzen.)

Aufgabe 37. (Singuläre Homologie einfacher Räume)
Bis auf Homöomorphie gibt es genau drei zweipunktige topologische Räume. Geben Sie für jeden von diesen explizit den singulären Kettenkomplex an, und berechnen Sie damit die Homologie dieser Räume.

Aufgabe 38. (Fünfer-Lemma)
Es sei folgendes kommutatives Diagramm von $\mathbb{K}$-Moduln gegeben, worin die Zeilen exakt sind:

$$\begin{tikzcd} A_5 \arrow[r] \arrow[d, "f_5"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"'] \\ B_5 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_1 \end{tikzcd}$$

Man zeige:

(a) Sind f_2 und f_4 Epimorphismen und f_1 ein Monomorphismus, dann ist f_3 ein Epimorphismus.

(b) Sind f_2 und f_4 Monomorphismen und f_5 ein Epimorphismus, dann ist f_3 ein Monomorphismus.

Tipp: Man kann Aufgabe 36(c) benutzen, muss man aber nicht.

Aufgabe 39. (Internes Hom-Objekt)
Zu Kettenkomplexen X und Y definieren wir einen neuen Kettenkomplex $\operatorname{Hom}(X,Y)$ wie folgt: im Grad n ist $\operatorname{Hom}(X,Y)_n = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(X_m, Y_{m+n})$, das Differential ist für $f \in \operatorname{Hom}(X,Y)_n$ gegeben durch $d(f) = \partial \circ f - (-1)^n f \circ \partial$. Man zeige:

(a) $\operatorname{Hom}(X,Y)$ ist ein Kettenkomplex.

(b) Ein 0-Zykel in $\operatorname{Hom}(X,Y)$ ist dasselbe wie eine Kettenabbildung $X \to Y$.

(c) Die $\mathbb{K}$-Moduln $H_0 \operatorname{Hom}(X,Y)$ und $[X,Y]$ sind isomorph.

(d) Für je drei Kettenkomplexe X, Y, Z hat man einen Isomorphismus von Kettenkomplexen
$$\operatorname{Hom}(X \otimes Y, Z) \cong \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Hom}(Y,Z)).$$

***-Aufgabe 40.** (Direkter Limes von Kettenkomplexen)
Man sagt, dass eine Kategorie $\mathcal{I}$ klein ist, wenn die Klasse $\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$ eine Menge ist. Sei nun $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie, $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Ein *Kolimes* von F ist ein Objekt $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ von $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\eta_i\colon F(i) \to \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ für jedes $i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, welche die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

- Sind $i, j \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$ und $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{I}}(i,j)$, so gilt $\eta_j \circ F(f) = \eta_i$.
- Es sei X ein Objekt von $\mathcal{C}$ und für jedes Objekt $i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$ sei ein Morphismus $\lambda_i\colon F(i) \to X$ so gegeben, dass $\lambda_j \circ F(f) = \lambda_i$ gilt falls $i, j \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$ und $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{I}}(i,j)$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi\colon \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F \to X$ mit $\varphi \circ \eta_i = \lambda_i$ für alle $i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$.

Beweisen Sie:

(a) Falls der Funktor F einen Kolimes besitzt, so ist dieser bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

(b) Jeder Funktor $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{K}\text{-Mod}$ besitzt einen Kolimes. Hierbei bezeichnet $\mathbb{K}$-Mod die Kategorie der $\mathbb{K}$-Moduln. (Tipp: Setzen Sie
$$\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F = \bigoplus_{i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})} F(i) \,/ \sim$$
wobei $\sim$ eine geeignete Äquivalenzrelation ist.)

(c) Jeder Funktor $F\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Ch}_{\mathbb{K}}$ besitzt einen Kolimes, wobei $\mathrm{Ch}_{\mathbb{K}}$ die Kategorie der Kettenkomplexe über $\mathbb{K}$ bezeichnet.

(d) Es gibt einen natürlichen Homomorphismus $\Phi\colon \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} H_*(F) \to H_*(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F)$.

Die Kategorie $\mathcal{I}$ heißt *gerichtet* wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für $i, j \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$ gibt es höchstens einen Morphismus von i nach j.
- Für je zwei Objekte $i, j \in \mathcal{I}$ gibt es ein Objekt k und Morphismen $i \to k$ und $j \to k$.

Ein typisches Beispiel hierfür wäre die Kategorie $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, wobei es genau dann einen Morphismus von i nach j gibt, wenn $i \le j$. Wenn $\mathcal{I}$ eine gerichtete kleine Kategorie ist und $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor ist, so heißt $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ auch *direkter Limes*, und man schreibt $\varinjlim F$. Es sei nun eine gerichtete kleine Kategorie $\mathcal{I}$ und ein Funktor $F\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Ch}_{\mathbb{K}}$ gegeben.

(e) Man zeige, dass $\Phi\colon \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} H_*(F) \to H_*(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F)$ ein Isomorphismus ist.