

# Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 7

Abgabe: Mi, 30.11.2011, in der Vorlesung

§ 3. — HOMOLOGIES.

Considérons une variété  $V$  à  $p$  dimensions; soit maintenant  $W$  une variété à  $q$  dimensions ( $q \leq p$ ) faisant partie de  $V$ . Supposons que la frontière complète de  $W$  se compose de  $\lambda$  variétés continues à  $q - 1$  dimensions

$$v_1, v_2, \dots, v_\lambda.$$

Nous exprimerons ce fait par la notation

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\lambda \simeq 0.$$

Plus généralement la notation

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \simeq k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

où les  $k$  sont des entiers et les  $v$  des variétés à  $q - 1$  dimensions, signifiera qu'il existe une variété  $W$  à  $q$  dimensions faisant partie de  $V$  et dont la frontière complète se composera de  $k_1$  variétés peu différentes de  $v_1$ , de  $k_2$  variétés peu différentes de  $v_2$ , de  $k_3$  variétés peu différentes de la variété opposée à  $v_3$  et de  $k_4$  variétés peu différentes de la variété opposée à  $v_4$ .

Les relations de cette forme pourront s'appeler des *homologies*.

Erste Definition von Homologie. Aus: H. Poincaré, Analysis Situs, 1895.

## Aufgabe 31. (Einige Kettenkomplexe)

Weisen Sie nach, dass durch

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{(1 \ 1)} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Kettenkomplexe gegeben sind und berechnen Sie ihre Homologie. Hierbei steht das unterstrichene Objekt jeweils im Grad 0, und nach links und rechts ist durch 0 fortzusetzen.

## Aufgabe 32. (Konstruktionen mit Kettenkomplexen)

Es seien  $X$  und  $Y$  Kettenkomplexe mit Differentialen  $\partial_X$  und  $\partial_Y$ .

- Die direkte Summe von  $X$  und  $Y$  sei der Kettenkomplex gegeben durch  $(X \oplus Y)_n = X_n \oplus Y_n$  sowie  $\partial_{X \oplus Y} = \partial_X \oplus \partial_Y$ . Beweisen Sie, dass dies in der Tat ein Kettenkomplex ist, und dass er die universelle Eigenschaft des Koproduktes von  $X$  und  $Y$  in der Kategorie der Kettenkomplexe hat. Konkret heißt das:  $X \oplus Y$  kommt mit Abbildungen  $i_X: X \rightarrow X \oplus Y$  und  $i_Y: Y \rightarrow X \oplus Y$ , und für jeden Kettenkomplex  $T$  mit Abbildungen  $t_X: X \rightarrow T$  und  $t_Y: Y \rightarrow T$  gibt es genau eine Abbildung  $f: X \oplus Y \rightarrow T$  mit  $fi_X = t_X$  und  $fi_Y = t_Y$ .
- Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Definieren Sie Kettenkomplexe  $\ker f$  und  $\operatorname{coker} f$  und weisen Sie nach, dass sie die jeweiligen universellen Eigenschaften in der Kategorie der Kettenkomplexe haben.
- Wir definieren die *Einhängung*  $\Sigma X$  als den Kettenkomplex mit  $(\Sigma X)_n = X_{n-1}$  und  $\partial_{\Sigma X} = -\partial_X$ . Man beweise, dass  $\partial_X: X \rightarrow \Sigma X$  ein Morphismus von Kettenkomplexen (vom Grad 0) ist. Was ist das Differential des Komplexes  $Z(X) = \ker \partial_X$ ?

**Aufgabe 33.** (Quasiisomorphismen und freie Kettenkomplexe)

- (a) Es sei  $i \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl und  $M$  ein  $\mathbb{K}$ -Modul. Man beweise, dass es einen Kettenkomplex

$$F: \cdots \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_i \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

derart gibt, dass  $F_k$  ein freier  $\mathbb{K}$ -Modul ist für alle  $k$ ,  $H_i F \cong M$  und  $H_k F = 0$  für  $k \neq i$ .

- (b) Geben Sie ein Beispiel für zwei Kettenkomplexe  $A$  und  $B$  mit  $H_* A \cong H_* B$  an, für die es keinen Quasiisomorphismus  $A \rightarrow B$  und keinen Quasiisomorphismus  $B \rightarrow A$  gibt. (Hinweis: Ein Quasiisomorphismus ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von Kettenkomplexen, für welche  $H_n f: H_n X \rightarrow H_n Y$  für alle  $n$  ein Isomorphismus ist.)
- (c) Beweisen Sie, dass es für je zwei Kettenkomplexe  $A$  und  $B$  mit  $H_* A \cong H_* B$  einen Kettenkomplex  $C$  und Quasiisomorphismen  $C \rightarrow A$  und  $C \rightarrow B$  gibt. (Tipp: Man setze  $U^{(i)}$  den Kettenkomplex wie in (a) mit  $M = H_i A$ ; wähle dann  $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} U^{(i)}$ .)

**Aufgabe 34.** (Quasiisomorphismen und Zusammenziehbarkeit)

- (a) Es sei  $i: A \rightarrow B$  die Inklusion eines Unterkettenkomplexes, und für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  und jedes  $b \in B_n$  existiere ein  $a \in A_n$  und ein  $b' \in B_{n+1}$  mit  $i_n(a) = b + \partial(b')$ . Man beweise, dass  $i$  ein Quasiisomorphismus ist.
- (b) Es sei  $A$  ein azyklischer Kettenkomplex, d. h.  $H_* A = 0$ . Man beweise, dass  $A$  genau dann zusammenziehbar ist, wenn für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Zyklen  $Z_n(A)$  direkter Summand von  $A_n$  sind.

**\*-Aufgabe 35.** (Simplizialkomplexe) Für  $n + 1$  affin unabhängige Punkte  $v_0, v_1, \dots, v_n$  in  $\mathbb{R}^N$  bezeichnen wir deren konvexe Hülle

$$S(v_0, v_1, \dots, v_n) = \{ \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \geq 0, \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1 \}$$

als das *affine Simplex mit Eckenmenge*  $\{v_0, \dots, v_n\}$ . Ein solches Simplex wird auch als  $n$ -Simplex bezeichnet. Ein *endlicher Simplizialkomplex* in  $\mathbb{R}^N$  ist ein Unterraum, der gegeben ist als Vereinigung einer endlichen Menge von affinen Simplizes, wobei diese endliche Menge von affinen Simplizes den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- (i) Die Seiten eines jeden Simplexes der Menge sind ebenfalls in der Menge.
- (ii) Der Durchschnitt von je zwei der Simplizes (sofern er nicht leer ist) ist wieder ein Simplex; und er ist Seite von jedem der beiden.

Polyeder sind wichtige Beispiele für Simplizialkomplexe. Ein *geordneter* Simplizialkomplex ist ein Simplizialkomplex wie oben zusammen mit den folgenden zusätzlichen Daten: Für jedes einzelne Simplex ist eine (totale) Anordnung seiner Eckenmenge gewählt; dabei ist verlangt, dass die Ecken einer Seite immer mit der induzierten Anordnung versehen sind.

In einem geordneten Simplizialkomplex gibt es zu jedem Simplex der Dimension  $n$  genau eine Möglichkeit, die Ecken von 0 bis  $n$  durchzunummerieren. Jedes  $n$ -Simplex ist also kanonisch beschreibbar als  $x = S(v_0, \dots, v_n)$ , wobei die Ecken gemäß ihrer Anordnung aufgeführt sind. Dann ist  $S(v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  diejenige Seite von  $x$ , die durch das Weglassen der  $i$ -ten Ecke entsteht; dieses  $(n - 1)$ -Simplex bezeichnen wir mit  $d_i x$ . Wenn wir also mit  $X_n$  die Menge der  $n$ -Simplizes bezeichnen, dann haben wir für jedes  $i$  mit  $0 \leq i \leq n$  eine Abbildung  $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ .

- (a) Beweisen Sie, dass hierdurch eine  $\Delta$ -Menge gegeben ist, das heißt: für jede nicht-negative ganze Zahl  $n$  haben wir eine Menge  $X_n$ , für jedes  $i$  mit  $0 \leq i \leq n$  eine Abbildung  $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ , und es gelten die Relationen  $d_j d_i = d_{i-1} d_j$  für  $j < i$ .

Einer  $\Delta$ -Menge  $X$  weisen wir nun folgendermaßen einen Kettenkomplex zu: wir setzen zunächst  $C_n(X) = \mathbb{K}[X_n]$ , der freie  $\mathbb{K}$ -Modul über der Menge  $X_n$ . Die Abbildung  $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$  induziert einen Morphismus von  $\mathbb{K}$ -Moduln  $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ , den wir auch mit  $d_i$  bezeichnen. Dann definieren wir  $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  als  $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ .

- (b) Man beweise, dass hierdurch wirklich ein Kettenkomplex definiert wird.
- (c) Man beschreibe ein Tetraeder (d. h., die Oberfläche) als Simplizialkomplex und gebe den hieraus konstruierten Kettenkomplex explizit an. Außerdem berechne man die Homologie dieses Kettenkomplexes.
- (d) Das  $n$ -Simplex ist selbst auch ein Simplizialkomplex; die Menge der  $k$ -Simplizes entspricht der Menge der  $(k + 1)$ -elementigen Teilmengen von  $\{0, \dots, n\}$ . Man beschreibe den zugehörigen Kettenkomplex und berechne seine Homologie. Diesen Kettenkomplex nennt man auch *Koszul-Komplex* (nach Jean-Louis Koszul, \*1921).