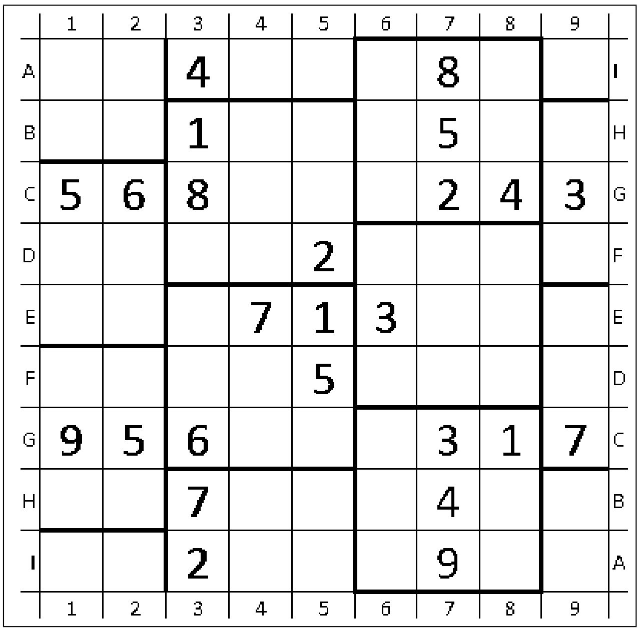
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 6 Abgabe: Mi, 23.11.2011, in der Vorlesung



Ein „Kleinsche Flasche“-Sudoku. © Tom Collyer 2009

Aufgabe 26. (Universelle Eigenschaft der universellen Überlagerung)
Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung, $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ und $x \in X$ seien Basispunkte mit $p(\tilde{x}) = x$.

(a) Man beweise: Für jede Überlagerung $q : Y \to X$ mit Basispunkt $y \in Y$ (so dass $q(y) = x$) gibt es genau einen Morphismus $f : \widetilde{X} \to Y$ von punktierten Überlagerungen, also eine Abbildung mit $qf = p$ und $f(\tilde{x}) = y$.

(b) Folgern Sie hieraus, dass für jede Überlagerung q wie oben $Y \cong \widetilde{X}/G$ gilt, wobei G eine Gruppe ist, die frei auf $\widetilde{X}$ wirkt.

Aufgabe 27. (Basiswechsel)

(a) Man zeige: wenn in dem pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

die Abbildung p eine Überlagerung ist, dann ist auch q eine Überlagerung. Die Abbildung g induziert einen Isomorphismus von der Faser über x zur Faser über $f(x)$. In einer solchen Situation schreibt man $f^*E = P$ und $f^*p = q$.

(b) Es seien $f_1, f_2 \colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen zwischen lokal wegzusammenhängenden und semilokal einfach-zusammenhängenden topologischen Räumen. Zeigen Sie für jede Überlagerung $p \colon E \to X$, dass die Überlagerungen $f_1^* p$ und $f_2^* p$ isomorph sind.

Aufgabe 28. ($\mathbb{RP}^2$ ist selten Totalraum)
Man zeige, dass jede Überlagerung $\mathbb{RP}^2 \to X$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 29. (Konfigurationsräume)
Für jeden Hausdorffraum X definieren wir den *geordneten n-fachen Konfigurationsraum*

$$\widetilde{C}^n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

als Teilraum von X^n. Auf diesem Raum wirkt die symmetrische Gruppe Σ_n von rechts durch vertauschen der Faktoren, und wir definieren den *ungeordneten n-fachen Konfigurationsraum* $C^n(X) = \widetilde{C}^n(X)/\Sigma_n$. Die Elemente von $C^n(X)$ können wir uns also als n-elementige Teilmengen von X vorstellen. Nun sei durch $E^n(X) = \{(x, c) \in X \times C^n(X) \mid x \in c\}$ ein Teilraum von $X \times C^n(X)$ definiert, und $\xi\colon E^n(X) \to C^n(X)$ sei die Einschränkung der Projektionsabbildung auf den zweiten Faktor.
Beweisen Sie, dass ξ eine Überlagerung ist. Beschreiben Sie sie im Fall $X = \mathbb{S}^1$ und $n = 2$ durch Ihnen bekannte Räume.

***-Aufgabe 30.** (Darstellender Raum für Überlagerungen)
Für jeden topologischen Raum X bezeichnen wir mit $\text{Üb}^n(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von n-blättrigen Überlagerungen von X. Es sei $\xi\colon E^n(\mathbb{R}^\infty) \to C^n(\mathbb{R}^\infty)$ wie in Aufgabe 29. Dann gilt der folgende

Satz: Falls X ein parakompakter Hausdorffraum ist, so induziert die Zuordnung $\big(f\colon X \to C^n(\mathbb{R}^\infty)\big) \mapsto f^*\xi$ eine Bijektion $\Phi\colon [X, C^n(\mathbb{R}^\infty)] \xrightarrow{1:1} \text{Üb}^n(X)$.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, diesen Satz zu beweisen, wenn X zusätzlich kompakt, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach-zusammenhängend ist; dies sei also von nun an angenommen.

(a) Man zeige, dass die im Satz erwähnte Zuordnung Φ wohldefiniert ist.

(b) Es sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung. Beweisen Sie, dass es für hinreichend große k eine stetige Abbildung $g\colon E \to \mathbb{R}^k$ derart gibt, dass für jedes $x \in X$ die Einschränkung $g|_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x) \to \mathbb{R}^k$ injektiv ist. (Tipp: Man wähle eine endliche Menge trivialisierender Umgebungen $\{U_i\}_{i=1}^k$, Homöomorphismen $\psi_i\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times \{1, \dots, n\}$ und eine Partition der Eins $\eta_i\colon X \to \mathbb{R}$, und setze dann

$$g_i(e) = \begin{cases} \eta_i(p(e)) \cdot \operatorname{pr}\psi_i(e) & \text{für } p(e) \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $g = (g_1, \dots, g_k)$, wobei $\operatorname{pr}\colon U_i \times \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}$ die Projektion ist.)

(c) Beweisen Sie, dass $f\colon X \to C^n(\mathbb{R}^k)$ mit $x \mapsto \{g(e) \mid e \in p^{-1}(x)\}$ wohldefiniert und stetig ist. Dann ist $p \cong f^*\xi$.

Damit ist Φ surjektiv. Für die Injektivität definieren wir zwei Abbildungen $u_1, u_2\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ durch

$$u_1(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, x_2, 0, \dots) \qquad u_2(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, \dots)$$

Seien außerdem $f_1, f_2\colon X \to \mathbb{R}^\infty$ stetig und $F\colon f_1^*\xi \xrightarrow{\cong} f_2^*\xi$ ein Isomorphismus von Überlagerungen; wir müssen zeigen, dass f_1 und f_2 homotop sind.

(d) Beweisen Sie, dass u_1 und u_2 beide homotop zur Identität von $\mathbb{R}^\infty$ sind, und dass sie jeweils Abbildungen $v_1, v_2\colon C^n(\mathbb{R}^\infty) \to C^n(\mathbb{R}^\infty)$ induzieren, die homotop zur Identität sind.

(e) Für jedes $x \in X$ liefert F eine Bijektion $F_x\colon f_1(x) = \xi_{f_1(x)} \to \xi_{f_2(x)} = f_2(x)$ von n-elementigen Teilmengen von X. Man zeige, dass durch

$$\begin{aligned} &I \times X \to C^n(\mathbb{R}^\infty) \\ &(t, x) \mapsto \{(1-t) \cdot u_1(a) + t \cdot u_2(F_x(a)) \mid a \in f_1(x)\} \end{aligned}$$

eine (stetige) Homotopie von $v_1 f_1$ nach $v_2 f_2$ gegeben ist. Hieraus folgt, dass f_1 und f_2 homotop sind.

Die Fachschaft informiert: Am 22. November gibt es im Goldenen Engel (Kesselgasse 1) wieder eine Semesterüberlagerungsparty! Ab 22 Uhr, es gibt Welcomeshots (so lange der Vorrat reicht), Beck's für 2€ und Erdbeercolimes für 1€... und Partymusik von DJ Lost Boy! Kostet: VVK 2,50€ (VVK am 17.11., 21.11.,22.11. in der Poppelsdorfer Mensa), AK 4€