

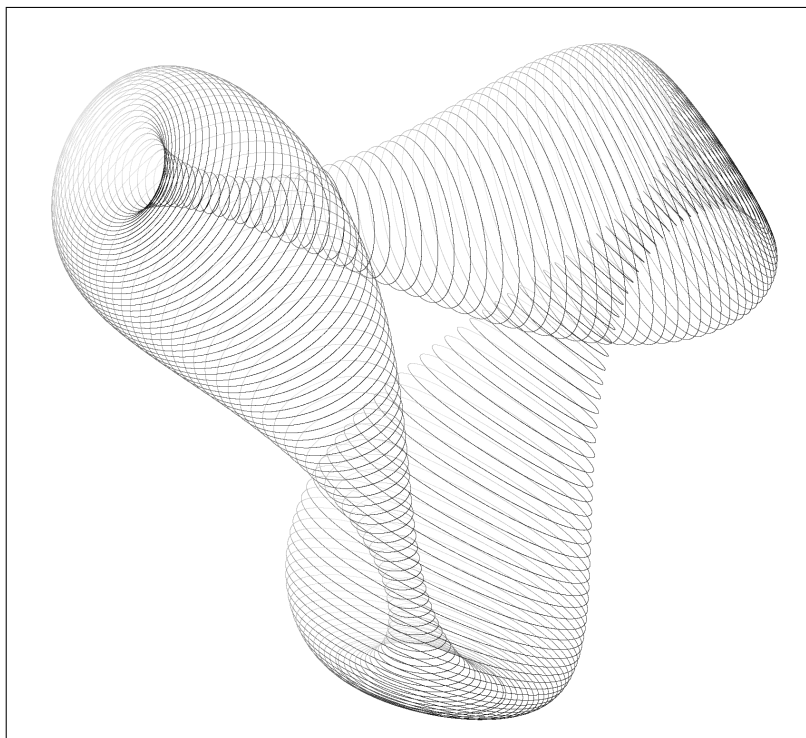
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 5

Abgabe: Mi, 16.11.2011, in der Vorlesung



Dreifache Überlagerung einer Kleinschen Flasche

Aufgabe 21. (Kleinsche Flasche)

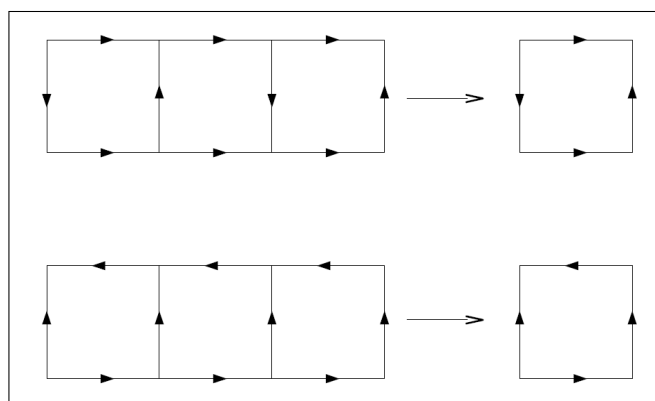
Es sei \sim die Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^2 , welche von

$$(x, y) \sim (x, y + 1) \quad \text{und} \quad (x, y) \sim (x + 1, -y)$$

erzeugt wird. Der Quotientenraum sei $K = \mathbb{R}^2 / \sim$ und wird *Kleinsche Flasche* genannt. Beweisen Sie, dass die Quotientenabbildung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ eine Überlagerung ist. Bestimmen Sie $\pi_1(K)$.

Aufgabe 22. (Überlagerungen der Kleinschen Flasche)

Überlegen Sie sich, inwiefern durch die Grafik



zwei dreifache Überlagerungen der Kleinschen Flasche gegeben sind. Sind die Überlagerungen isomorph?

Aufgabe 23. (Universelle Überlagerung eines Bouquets)

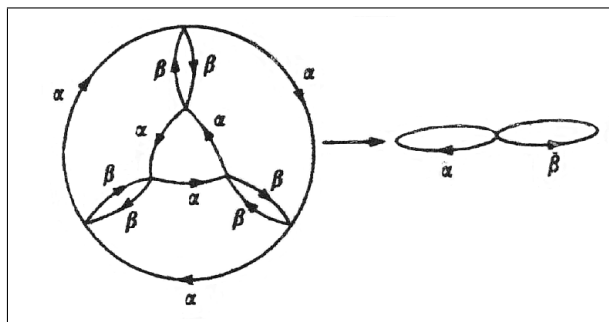
Sei X ein einfach-zusammenhängender Raum mit Grundpunkt x_0 . Man zeige, dass die universelle Überlagerung des Bouquets $\mathbb{S}^1 \vee X$ homöomorph ist zu $(\mathbb{R} \sqcup (\mathbb{Z} \times X)) / \sim$, wobei jede ganze Zahl n aus dem ersten Summanden mit dem Grundpunkt (n, x_0) aus dem n -ten Blatt $\{n\} \times X$ des zweiten Summanden identifiziert wird: $n \sim (n, x_0)$. Kann man dies verallgemeinern für beliebiges Y anstelle von \mathbb{S}^1 ?

Aufgabe 24. (Eine sechsfache Überlagerung)

Ein (kombinatorischer) Graph besteht für uns aus einer Menge E von Ecken und einer Menge K von Kanten, sowie Abbildungen von Mengen $q : K \rightarrow E$ und $z : K \rightarrow E$, die jeder Kante ihren Start- und Endpunkt zuordnen. Das topologische Modell hierzu erhält man, indem man an die diskrete Eckenmenge E die Kanten entlang der Abbildungen q und z anklebt, also als den Quotient $(E \sqcup (K \times I)) / \sim$ wobei $q(k) \sim (k, 0)$ und $z(k) \sim (k, 1)$ für alle k .

Ein Teilgraph von (E, K) ist ein Graph (E', K') mit $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ derart, dass $q(K') \subseteq E'$ und $z(K') \subseteq E'$. Auf der topologischen Seite erhält man hieraus einen Teilraum. Ein *Spannbaum* des Graphen (E, K) ist ein Teilgraph, der alle Ecken in E enthält und einfach zusammenhängend ist.

- Auf der linken Seite in der Grafik unten ist ein Graph X abgebildet. Wählen Sie eine Ecke e als Basispunkt, und geben Sie einen Spannbaum B dieses Graphen an.
- Für jede Kante k , die nicht zu B gehört, wählen Sie einen Weg w_k wie folgt: starten Sie in e , gehen Sie in B nach $q(k)$, dann entlang k zu $z(k)$ und dann in B zurück zu e . Beweisen Sie, dass $\pi_1(X, e) \cong F(\{[w_k]\})$ die freie Gruppe in diesen Schleifen $[w_k]$ ist.
- Für den Graph Y auf der rechten Seite ist $\pi_1(Y, *) \cong \langle \alpha, \beta \rangle$ die freie Gruppe in zwei Erzeugern. Geben Sie explizit die injektive Abbildung $\pi_1(X, e) \rightarrow \pi_1(Y, *)$ an. Was ist der Kokern dieser Abbildung?
- Geben Sie explizit alle Deckbewegungen von X an.



***-Aufgabe 25.** (Satz von Nielsen-Schreier)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung der Aufgabe 24. Es sei ein beliebiger zusammenhängender Graph $X = (E, K)$ gegeben, $e \in E$ sei ein Basispunkt.

- Beweisen Sie, dass es einen Spannbaum B von (E, K) gibt.
- Man zeige, dass $\pi_1(X, e) \cong F(J)$ die freie Gruppe über der Menge J derjenigen Kanten ist, die nicht zu B gehören. (Tipp: Jede Schleife und jede Homotopie wird nur endlich viele Ecken und Kanten treffen.)
- Zeigen Sie, dass jede Überlagerung eines Graphen wieder ein Graph ist.
- Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist.