# Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

**Blatt 4** Abgabe: Mi, 9.11.2011, in der Vorlesung

§ 20.

**Ein Beispiel.**

Es soll ein Beispiel betrachtet werden (das übrigens nicht eine einzige Mannigfaltigkeit, sondern eine ganze Folge von Mannigfaltigkeiten umfaßt), welches einen in gewisser Hinsicht möglichst einfachen Typus von zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten darstellt.

Das Schema der betrachteten Mannigfaltigkeiten besteht aus einer einzigen dreidimensionalen Zelle $a^3$, ist also ein Fundamentalpolyeder, und da die Mannigfaltigkeit geschlossen sein soll, so ist diese Zelle von einer geraden Anzahl von Randpolygonen begrenzt. Den einfachsten Fall erhält man also, wenn man die Oberfläche der als Kugel vorgestellten Zelle $a^3$ durch einen Hauptkreis (Äquator) der in $l$ gleiche Teile geteilt sei, in zwei Polygone zerlegt annimmt. Die Bedingung, daß die Mannigfaltigkeit zweiseitig sein soll, läßt noch $l$ verschiedene Möglichkeiten, die beiden Polygone einander nach erster Art zuzuordnen, offen. Diese Zuordnungen der beiden Halbkugelflächen sind ausdrückbar durch die Formeln

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\lambda}{l}, \ \vartheta' = -\vartheta, \ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots l-1)$$

wenn mit $\varphi$, $\vartheta$ geographische Länge und Breite eines Punktes der oberen Halbkugel ($\vartheta > 0$), mit $\varphi'$, $\vartheta'$ diese Koordinaten für den dem Punkte ($\varphi$, $\vartheta$) zugeordneten Punkt der unteren Halbkugel bezeichnet werden. Durch die beiden Zahlen $l$ und $\lambda$ ist aber die Zuordnung vollständig charakterisiert. Das hiedurch definierte Schema möge mit $(l, \lambda)$ bezeichnet werden. Die Schemata $(l, 0)$ stellen alle die durch das Schema $(1, 0)$ definierte sphärische Mannigfaltigkeit dar. Überhaupt gilt ganz allgemein für den Fall, daß $l$, $\lambda$ einen gemeinsamen Teiler haben, also etwa $l = k\, l_1$, $\lambda = k\, \lambda_1$ ist, daß die durch das Schema $(l, \lambda)$ definierte Mannigfaltigkeit von der durch das Schema $(l_1, \lambda_1)$ definierten nicht verschieden ist. Für jeden Wert von $l$ brauchen sonach für $\lambda$ nur die $\varphi(l)$ zu $l$ teilerfremden Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots l-1$ in Betracht gezogen werden.

Erste Konstruktion von Linsenräumen.
Aus: H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatsh. für Math. und Phys. 19, 1-118 (1908)

**Aufgabe 16.** (Überlagerungen durch Gruppenwirkungen)
Es sei $X$ ein Hausdorffraum und $G$ eine endliche Untergruppe der Homöomorphismengruppe von $X$. Angenommen, die Wirkung von $G$ auf $X$ ist frei (d. h. wenn $g(x) = x$ für ein $g \in G$ und $x \in X$, dann folgt $g = \mathrm{id}_X$). Man beweise, dass die Quotientenabbildung $X \to X/G$ eine Überlagerung ist.

**Aufgabe 17.** (Linsenräume)
Man betrachte $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Für teilerfremde, positive ganze Zahlen $n$, $k$ sei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ die stetige Abbildung, die durch $h(z_1, z_2) = (z_1 \cdot \zeta_n, z_2 \cdot \zeta_n^k)$ definiert ist.

(a) Man zeige, dass $h$ eine Untergruppe $G$ der Homöomorphismengruppe von $\mathbb{S}^3$ erzeugt, die zyklisch von der Ordnung $n$ ist.

(b) Es sei $L(n, k)$ der Raum der Bahnen $\mathbb{S}^3/G$ (mit der Quotiententopologie). Man beweise, dass $\mathbb{S}^3 \to L(n, k)$ eine Überlagerung ist, und berechne die Fundamentalgruppe von $L(n, k)$.

(c) Man zeige: Wenn $L(n, k)$ und $L(n', k')$ homöomorph sind, dann gilt $n = n'$.

(d) Man beweise, dass $L(2, 1)$ und $\mathbb{RP}^3$ homöomorph sind.

**Aufgabe 18.** (Gruppenstrukturen auf Überlagerungen)
Es sei $G$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element 1, und es sei $p : E \to G$ eine Überlagerung, wobei $E$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Ferner sei $e \in p^{-1}(\{1\})$ gewählt. Beweisen Sie, dass es auf $E$ genau eine Gruppenstruktur mit $e$ als neutralem Element gibt, so dass $E$ mit seiner Topologie eine topologische Gruppe und $p$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Ist $G$ abelsch, so ist $E$ auch abelsch.

**Aufgabe 19.** (Gruppenstrukturen auf dem Kreis)
Es seien $\mu$ und $\mu'$ zwei Multiplikationen auf $\mathbb{S}^1$ mit neutralem Element $1 \in \mathbb{S}^1$. Man beweise, dass $\mu$ und $\mu'$ homotop sind.
Tipp: Man kann annehmen, dass $\mu'$ die Standardmultiplikation ist. Nutzen Sie Aufgabe 2, um $\pi_1(\mu)$ zu bestimmen. Betrachten Sie dann die Abbildung $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $(s,t) \mapsto \mu(s,t) \cdot (st)^{-1}$ und Aufgabe 14.

***-Aufgabe 20.** (Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe eines Raumes)
Es sei $I$ eine Menge, und $X = \bigvee_I \mathbb{S}^1$ ein Bouquet von Kreisen, indiziert über die Menge $I$. Mit $*$ bezeichnen wir den offensichtlichen Basispunkt von $X$.

(a) Man beweise, dass $\pi_1(X,*) \cong F(I)$ die freie Gruppe über der Menge $I$ ist. (Tipp: Es kann hilfreich sein, zunächst endliche Mengen $I$ zu betrachten.)

Nun sei $J$ eine weitere Menge, und für jedes $j \in J$ sei eine Abbildung $f_j : (\mathbb{S}^1, 1) \to (X,*)$ gegeben. Hieraus werde nun der pushout $Y$ in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "(f_j)_{j\in J}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ \coprod_{j\in J} \mathbb{D}^2 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

konstruiert. $Y$ entsteht also durch Ankleben von 2-Zellen an $X$, für jedes Element von $J$ eine Zelle. Den Basispunkt von $Y$ nennen wir auch $*$. Wir bezeichnen mit $R$ die Menge $\{[f_j]\}_{j\in J} \subset F(I)$.

(b) Man beweise, dass $\langle I, R\rangle$ eine Präsentation der Gruppe $\pi_1(Y,*)$ ist. Das heißt, dass $\pi_1(Y,*) \cong F(I)/N$ gilt, wobei $N$ der von den Elementen von $R$ erzeugte Normalteiler (normal Hülle) in $F(I)$ ist. (Tipp: Erneut hilft, $I$ und $J$ zunächst als endlich vorauszusetzen.)

(c) Man zeige, dass jede Gruppe Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes ist.

(d) Ein Dreieck wird wie im Bild unten in drei Teildreiecke unterteilt. Nun werden gleich bezeichnete Pfeile in Pfeilrichtung miteinander identifiziert; hieraus ergebe sich der Raum $Z$. Insbesondere werden die drei Eckpunkte und der Punkt in der Mitte zu ein und demselben Punkt, den wir mit $z_0$ bezeichnen. Man bestimme $\pi_1(Z, z_0)$.