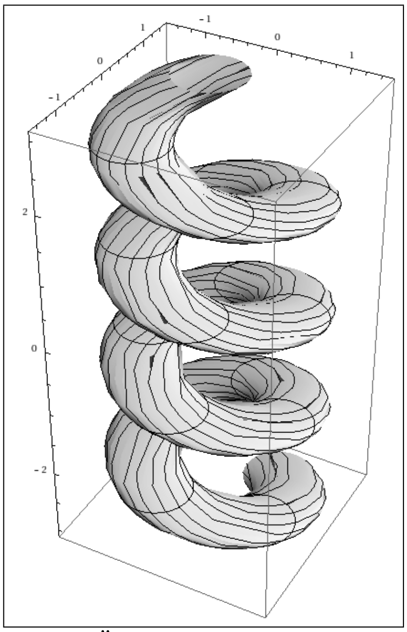
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 3 Abgabe: Mi, 2.11.2011, in der Vorlesung



Eine Überlagerung des Torus

Aufgabe 11. (Zusammensetzung von Überlagerungen)
Sind $\xi : X \to Y$ und $\zeta : Y \to Z$ endliche Überlagerungen, so auch die Komposition $\zeta \circ \xi : X \to Z$. Ist das Produkt $\zeta_1 \times \zeta_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ zweier endlicher Überlagerungen wieder eine Überlagerung?

Aufgabe 12. (Komplexe Polynome als Überlagerungen)
Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$, und W sei die Menge der kritischen Werte. Dann ist die Einschränkung $p : \tilde{X} = \mathbb{C} - p^{-1}(W) \to X = \mathbb{C} - W$ eine n-blättrige Überlagerung

Aufgabe 13. (Abbildungszylinder und Anwendungen)

(a) Zu einer Abbildung $f : X \to Y$ ist der *Abbildungszylinder* Z_f als der pushout in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_0"] & Y \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r] & Z_f \end{tikzcd}$$

definiert, wobei i_0 die Inklusion $x \mapsto (x, 0)$ ist. Man zeige, dass die Abbildung $Y \to Z_f$ eine injektive Homotopieäquivalenz ist. (Tipp: Man nutze Aufgabe 8.)

(b) Wenn $U \subseteq Y$ und $f^{-1}(U) \subseteq X$ zusammenziehbar sind, dann haben X und $X \times (0,1] \cup U \subseteq Z_f$ isomorphe Fundamentalgruppen. (Tipp: Man betrachte die Überdeckung durch $f^{-1}(U) \times [0,1]$ und $X \times (0,1]$.)

Die folgenden beiden Aufgabenteile lassen sich beispielsweise so lösen: man überdecke den gegebenen Raum $Y = U \cup V$ mit geeigneten offenen zusammenziehbaren Mengen U und V, wobei $U \cap V = A \sqcup B$ die disjunkte Vereinigung zweier offener zusammenziehbarer Mengen A und B ist. Dann setze man $X = \mathbb{S}^1$ und konstruiere eine Abbildung $f : X \to Y$, die gute Chancen hat, einen Erzeuger von $\pi_1(Y)$ zu repräsentieren. Schließlich bestimme man $\pi_1(Z_f)$.

(c) Es sei Y der Raum, der aus $\mathbb{D}^2$ durch Identifikation zweier innerer Punkte entsteht. Man bestimme $\pi_1(Y)$.

(d) Es sei Y die reelle Gerade mit zwei Ursprüngen, also

$$Y = \big(\mathbb{R} \times \{0,1\}\big) \,/\, \big((x,0) \sim (x,1) \text{ für alle } x \neq 0\big)$$

Man bestimme $\pi_1(Y)$.

Aufgabe 14. (Kohomotopie)
Es sei X ein nicht-leerer, wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Man zeige:

(a) Wenn $f : X \to \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung ist, die auf Fundamentalgruppen die triviale Abbildung induziert, dann ist f homotop zu einer konstanten Abbildung.

(b) Wenn $\pi_1(X)$ eine endliche Gruppe ist, dann ist jede Abbildung $f : X \to \mathbb{S}^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung.

***-Aufgabe 15.** (Kardanische Aufhängung)
Die *kardanische Aufhängung*, benannt nach Gerolamo Cardano (1501-1576), ist eine Vorrichtung um Gegenstände drehbar zu lagern (siehe (1) im Bild unten). Umgekehrt kann die Konstruktion auch dafür verwendet werden, die genaue Drehlage eines Objektes im Raum zu beschreiben; die Position der drei Ringe ist durch Drehwinkel gegeben und legt die Richtung des eingehängten Objektes eindeutig fest. Mathematisch gesprochen haben wir also eine Abbildung $\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to SO(3)$. In allgemeiner Lage (2) werden dabei die drei Freiheitsgrade der Ringe zu drei Freiheitsgraden bzgl. Drehungen des Objektes: seitliches Kippen, seitliches Drehen (nach rechts und links) und vertikales Drehen (oben und unten).
Allerdings gibt es ein Problem, wenn zwei der Ringe in derselben Ebene liegen (3), denn dann lässt sich das Objekt nicht mehr in alle Richtungen drehen, es fehlt ein Freiheitsgrad. Dieses Phänomen nennt sich kardanische Blockade (engl. *Gimbal lock*) und ist beispielsweise bei der Navigation von Schiffen, der Luftfahrt, bei dreidimensionalen Simulationen und bei der Programmierung von Computerspielen von Bedeutung. Mathematisch steckt dahinter, dass die Abbildung ϕ kein lokaler Homöomorphismus (im Sinne der Aufgabe 16 von „Einführung in die Geometrie und Topologie“ aus dem letzten Semester) ist. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass es gar keinen lokalen Homöomorphismus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to SO(3)$ geben kann.

(a) Es sei X ein nicht-leerer, kompakter topologischer Raum, Y sei ein zusammenhängender Hausdorffraum und $f : X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Beweisen Sie, dass f eine Überlagerung ist.

Zeigen Sie nun **entweder**

(b) Wenn $f : G \to H$ ein Morphismus kompakter zusammenhängender Liegruppen gleicher Dimension ist, der endlichen Kern hat, dann ist f eine Überlagerung. Insbesondere ist die Abbildung $SU(2) \to SO(3)$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

eine Überlagerung. Wegen $\mathbb{S}^3 \cong SU(2)$ ist dies eine universelle Überlagerung.

oder

(b') Es gibt einen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$.

Jetzt können wir beweisen, worauf wir eigentlich hinauswollen:

(c) Bestimmen Sie die Gruppe $\pi_1(SO(3))$. Beweisen Sie damit, dass es keinen lokalen Homöomorphismus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to SO(3)$ gibt.