

# Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 2

Abgabe: Mi, 26.10.2011, in der Vorlesung

## § 52. Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Komplexes.

Häufig läßt sich die Bestimmung der Fundamentalgruppe eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  dadurch vereinfachen, daß man  $\mathfrak{K}$  in zwei Teilkomplexe mit bekannten Fundamentalgruppen zerlegt.  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$  seien zwei zusammenhängende Teilkomplexe eines zusammenhängenden  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\mathfrak{K}$ ; jedes Simplex von  $\mathfrak{K}$  soll mindestens einem der beiden Teilkomplexe angehören. Der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$ , der wegen des vorausgesetzten Zusammenhanges von  $\mathfrak{K}$  nicht leer ist, sei ebenfalls zusammenhängend.

$\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}''$ ,  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$  seien die Fundamentalgruppen von  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{K}'$ ,  $\mathfrak{K}''$  und  $\mathfrak{D}$ . Wir wählen als Anfangspunkt für die geschlossenen Wege einen Punkt  $O$  von  $\mathfrak{D}$ . Dann ist jeder geschlossene Weg von  $\mathfrak{D}$  zugleich ein Weg von  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$ . Somit entspricht jedem Element von  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$  ein Element von  $\mathfrak{F}'$  und eines von  $\mathfrak{F}''$ . Dann gilt der

**Satz I:**  $\mathfrak{F}$  ist eine Faktorgruppe des freien Produktes  $\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$ ; man erhält  $\mathfrak{F}$  aus dem freien Produkt, wenn man je zwei Elemente von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$ , die demselben Elemente von  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$  entsprechen, zusammenfallen läßt, also durch ihre Gleichsetzung eine neue Relation zwischen den Erzeugenden von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$  hinzufügt.

Aus: Seifert, Threlfall, Lehrbuch der Topologie

### Aufgabe 6. (Fundamentalgruppen von Komplementen)

Es seien  $m, n$  positive ganze Zahlen mit  $m < n - 1$ .

- Man bestimme  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m)$ .
- Man bestimme  $\pi_1(\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^m)$ .

Hierbei stellen wir uns  $\mathbb{R}^m$  durch  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \underbrace{\{(0, 0, \dots, 0)\}}_{n-m} \subset \mathbb{R}^n$  als Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  vor, und analog für  $\mathbb{S}^n$ .

### Aufgabe 7. (Vereinigung konvexer Mengen)

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  konvexe Mengen in  $\mathbb{R}^m$  derart, dass  $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$  für alle  $i, j, k$ . Man beweise, dass  $\pi_1(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = \{1\}$ .

### Aufgabe 8. (Ankleben höherer Zellen)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{D}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{D}^n & \longrightarrow & Z
 \end{array}$$

- Es sei  $Y$  der pushout in dem Diagramm ganz links. Die Abbildung  $A \rightarrow B$  ist die Inklusion eines strengen Deformationsretraktes. Man beweise, dass dann auch  $X \rightarrow Y$  Inklusion eines strengen Deformationsretraktes ist. (Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für Quotientenabbildungen  $U \rightarrow V$  auch die Abbildung  $U \times I \rightarrow V \times I$  eine Quotientenabbildung ist.)
- Für das pushout-Diagramm in der Mitte beweise man, dass  $X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz ist.

- (c) Es sei nun  $n \geq 3$ . Man beweise, dass die Abbildung  $X \rightarrow Z$  im rechten pushout-Diagramm einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert. (Tipp: Man wähle  $U = \mathring{\mathbb{D}}^n$  und  $V = X \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$ , aufgefasst als Teilmengen von  $Z$ , und nutze Seifert-van Kampen.)

**Aufgabe 9.** (Fundamentalgruppen reeller projektiver Räume)

Es sei  $n \geq 1$  und  $P$  der pushout in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^n & \longrightarrow & P \end{array}$$

wobei die obere horizontale Abbildung die kanonische Projektion ist.

- (a) Die Inklusion  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  mit  $[x_1 : x_2 : \dots : x_n] \mapsto [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 0]$  und die Abbildung  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  mit  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : x_2 : \dots : x_n : \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}]$  induzieren eine bijektive stetige Abbildung  $\lambda : P \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .
- (b)  $\lambda$  ist ein Homöomorphismus (Tipp:  $P$  ist kompakt und  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  ist ein Hausdorffraum).  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  entsteht also aus  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  durch Ankleben einer  $n$ -Zelle.
- (c) Nutzen Sie Aufgabe 8, um  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  für alle  $n \geq 1$  zu bestimmen.

**\*-Aufgabe 10.** (Wirtinger-Präsentation der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements)

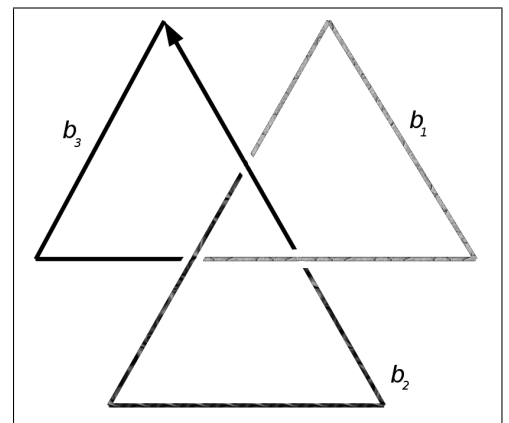
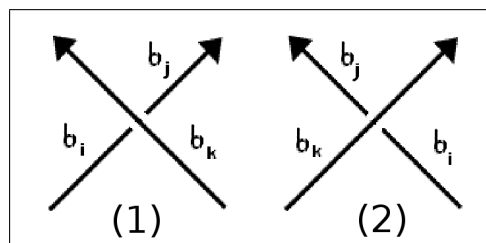
Unter einem Knoten  $K$  verstehen wir ein orientiertes Polygon im  $\mathbb{R}^3$ , also eine stückweise affine geschlossene Kurve  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  oder, je nach Kontext, ihr Bild. Wir wollen zwei solche  $K, K'$  als gleich ansehen, wenn es einen Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt derart, dass  $h(K) = K'$ . Um zwei Knoten zu unterscheiden, kann man sich beispielsweise die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  des Knotenkomplements ansehen. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Präsentation dieser Gruppe anzugeben.

Es sei  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die senkrechte Projektion auf eine Ebene. Wir nehmen an, dass  $K$  so liegt, dass keine drei Punkte von  $K$  unter  $p$  auf denselben Punkt abgebildet werden. Für jeden Punkt der Ebene mit genau zwei Urbildern auf  $K$  kann man eindeutig von einem „unteren“ und einem „oberen“ sprechen; es sei  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  die Menge der „unteren Punkte“ auf  $K$ ; wir setzen  $U_0 = U_n$ . Diese  $n$  Punkte teilen  $K$  in Abschnitte  $b_1, b_2, \dots, b_n$  (wobei  $b_i$  ein Weg von  $U_{i-1}$  nach  $U_i$  ist für  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Man beweise: Man hat eine Gruppenpräsentation

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle g_1, g_2, \dots, g_n \mid R \rangle,$$

wobei die Relationen  $R$  wie folgt gegeben sind: für jede Kreuzung vom Typ (1) eine Relation  $g_j = g_k g_i g_k^{-1}$ , und für jede Kreuzung vom Typ (2) eine Relation  $g_j = g_k^{-1} g_i g_k$ .



Polygonale Form des Kleeblattknotens

Hierbei wird  $g_i$  von einer Schleife repräsentiert, die von einem Basispunkt außerhalb von  $K$  ausgehend zunächst zum Bogen  $b_i$ , dann in positiver Richtung einmal um ihn herum, und dann zurück zum Basispunkt läuft. Die auf diese Weise erhaltene Präsentation wird die *Wirtinger-Präsentation* der Knotengruppe genannt (nach Wilhelm Wirtinger, 1865-1945).

Bestimmen Sie Gruppenpräsentationen von  $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  für  $K$  den Kleeblattknoten und  $K$  den Unknoten. Zeigen Sie, dass die entstehenden Gruppen nicht isomorph sind (damit ist also gezeigt, dass der Kleeblattknoten nicht trivial ist). Tipp: für den Kleeblattknoten gibt es eine Surjektion  $G \rightarrow \mathcal{S}_3$ .