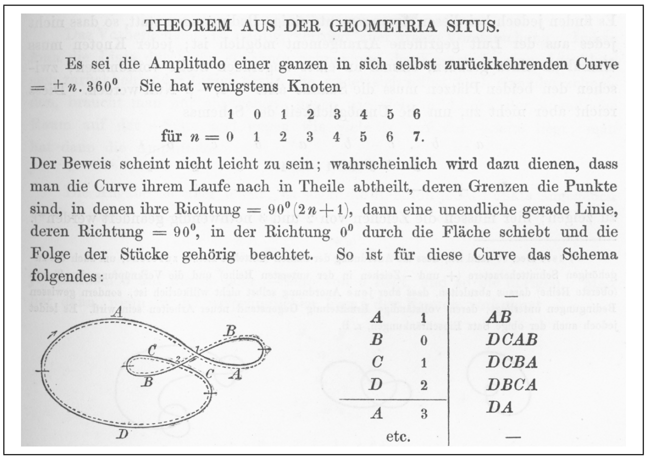
Übungsaufgaben zur Topologie I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer, Dr. M. Langer

Wintersemester 2011/12

Blatt 1 Abgabe: Mi, 19.10.2011, in der Vorlesung



THEOREM AUS DER GEOMETRIA SITUS.

Es sei die Amplitudo einer ganzen in sich selbst zurückkehrenden Curve $= \pm n . 360^0$. Sie hat wenigstens Knoten

$$\begin{array}{lcccccccc} & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{für } n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7. \end{array}$$

Der Beweis scheint nicht leicht zu sein; wahrscheinlich wird dazu dienen, dass man die Curve ihrem Laufe nach in Theile abtheilt, deren Grenzen die Punkte sind, in denen ihre Richtung $= 90^0(2n+1)$, dann eine unendliche gerade Linie, deren Richtung $= 90^0$, in der Richtung 0^0 durch die Fläche schiebt und die Folge der Stücke gehörig beachtet. So ist für diese Curve das Schema folgendes:

		—
A	1	*AB*
B	0	*DCAB*
C	1	*DCBA*
D	2	*DBCA*
A	3	*DA*
etc.		—

C. F. Gauss, Notiz aus dem Nachlass vermutlich zwischen 1823 und 1827

Aufgabe 1. (Induzierte Homomorphismen auf $\pi_1(\mathbb{T}^2)$)
Die Fundamentalgruppe des 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) Man finde Repräsentanten $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$, deren Homotopieklassen Erzeuger dieser Gruppe sind.

(b) Man schreibe die Homotopieklasse des Torusknotens

$$\tau(s) = (\exp(6s\,\pi\, i), \exp(10s\,\pi\, i)), \quad 0 \leq s \leq 1$$

in den Erzeugern.

(c) Für die Selbstabbildung $f(z_1, z_2) = (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, bestimme man den induzierten Homomorphismus f_*.

Aufgabe 2. (Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe)
Es sei $(G, \bullet)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Für je zwei Abbildungen $f, g : (\mathbb{S}^1, 1) \to (G, e)$ definieren wir $f \bullet g : \mathbb{S}^1 \to G$ als $(f \bullet g)(s) = f(s) \bullet g(s)$ für alle $s \in \mathbb{S}^1$.

(a) Man zeige, dass durch $[f] \bullet [g] = [f \bullet g]$ eine wohldefinierte Gruppenmultiplikation auf $\pi_1(G, e)$ gegeben ist. Was ist das neutrale Element?

(b) Man zeige, dass $[\alpha][\beta] = [\alpha] \bullet [\beta]$ für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$ (Tipp: Man betrachte $[\alpha c_e] \bullet [c_e \beta]$, wobei c_e der konstante Weg e ist).

(c) Man beweise, dass $\pi_1(G, e)$ eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 3. (Fundamentalgruppe eines Retrakts)
Es sei (X, x_0) ein Retrakt von (Y, y_0), d.h. es gibt ein $\iota : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ und ein $R : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ mit $R \circ \iota = \mathrm{id}_X$.

(a) Man zeige: es gibt eine zerfallende, kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \underset{\iota_*}{\overset{R_*}{\rightleftarrows}} \pi_1(X, x_0) \longrightarrow 1$$

d.h. ι_* ist injektiv, R_* surjektiv, $R_* \circ \iota_* = \mathrm{id}$, und $N = \mathrm{kern}\, R_*$ ist eine normale Untergruppe.

(b) Man zeige, dass es eine surjektive Abbildung $\pi_1(A \vee B) \to \pi_1(A) \times \pi_1(B)$ gibt.

Aufgabe 4. (Schinkenbrötchensatz)
Man betrachte $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$: zu einem Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ und $d \in \mathbb{R}$ bezeichne $E(x,d)$ diejenige Ebene im $\mathbb{R}^3$, welche parallel zur Tangentialebene $T_x\mathbb{S}^2$ liegt und durch den Punkt dx verläuft. Die Ebene $E(x,d)$ teilt den $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume; die orientierte Gerade vom Ursprung durch x ist normal zu $E(x,d)$ für alle d. Der Halbraum, welcher den Ursprung enthält, sei $E^-(x,d)$, der andere werde mit $E^+(x,d)$ bezeichnet. Offenbar gilt $E^+(x,d) = E^-(-x,-d)$. Seien nun Teilmengen A_1, A_2, A_3 des $\mathbb{R}^3$ gegeben, so dass gilt:
(i) Die Funktionen

$$\mathrm{Vol}_i^{\pm} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,d) \mapsto \mathrm{volume}(A_i \cap E^{\pm}(x,d)), \quad i = 1,2,3$$

sind definiert und stetig.
(ii) Zu jedem $x \in \mathbb{S}^2$ gibt es genau ein $d_x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Vol}_1^+(x,d_x) = \mathrm{Vol}_1^-(x,d_x)$, und die Funktion $\underline{d} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_x$ ist stetig.
<u>Beweisen Sie nun:</u> Es gibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, welche A_1, A_2 und A_3 in je zwei Teilmengen gleichen Volumens zerlegt.
Zum Beispiel gelten die Voraussetzungen oben für den Brot-, Butter- und Schinkenanteil eines handelsüblichen Schinkenbrötchens. (Wenn Ihnen das lieber ist, können Sie natürlich statt Volumen auch Gewicht o.ä. messen.)
Tipp: Betrachten Sie $v : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (\mathrm{Vol}_2^+(x,d_x), \mathrm{Vol}_3^+(x,d_x))$.

***-Aufgabe 5.** (Index von Vektorfeldern in der Ebene)
Es sei V ein Vektorfeld in der Ebene mit nur endlich vielen kritischen Punkten, d. h. eine stetige Abbildung $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $V(x) = 0$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}^2$. Die Menge aller dieser V sei $\mathbb{V}$.
Für jede stetige Kurve $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ mit $V(\gamma(s)) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{S}^1$ definieren wir $\mathrm{ind}(V,\gamma)$ als die Umlaufzahl der Abbildung

$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad s \mapsto \frac{V(\gamma(s))}{||V(\gamma(s))||}.$$

(a) Wir nennen $V_0, V_1 \in \mathbb{V}$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ gibt derart, dass $H(x,0) = V_0(x)$, $H(x,1) = V_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und $H(-,t) \in \mathbb{V}$ für alle $t \in I$ gilt. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ind}(V_0,\gamma) = \mathrm{ind}(V_1,\gamma)$, falls $H(\gamma(s),t) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{S}^1$, $t \in I$.

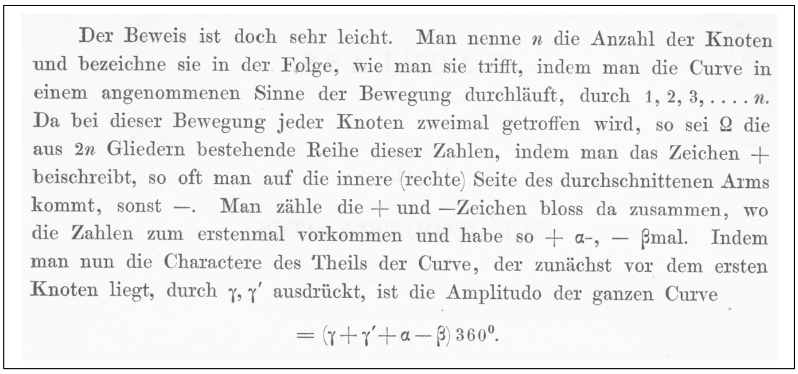
Für gegebenes $V \in \mathbb{V}$ sei Γ_V sei die Menge aller $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ mit $V(\gamma(s)) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{S}^1$.

(b) Es sei $z \in \mathbb{R}^2$ mit $V(z) = 0$. Wir betrachten alle diejenigen $\gamma \in \Gamma_V$, welche z genau einmal umlaufen und für die z der einzige kritische Punkt von V im Inneren der Kurve γ ist. Beweisen Sie, dass der Wert $\mathrm{ind}(V,\gamma)$ nicht von der Wahl von γ abhängt. Wir definieren den *lokalen Index von V an z* als $\mathrm{ind}(V,z) = \mathrm{ind}(V,\gamma)$ für solche γ.

(c) Es sei nun $\gamma \in \Gamma_V$ beliebig, und Z die Menge aller kritischen Punkte von V im Inneren der Kurve γ. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ind}(V,\gamma) = \sum_{z \in Z} n_z \cdot \mathrm{ind}(V,z)$, wenn γ den Punkt z genau n_z mal umläuft.

Wir definieren den *globalen Index von V* als $\mathrm{ind}(V) = \mathrm{ind}(V,\gamma)$ für eine einfache Kurve $\gamma \in \Gamma_V$, in deren Innerem alle kritischen Punkte von V liegen.

(d) Man beweise, dass es homotope V_0 und V_1 in $\mathbb{V}$ gibt mit $\mathrm{ind}(V_0) \neq \mathrm{ind}(V_1)$. Wenn es aber ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ und eine Homotopie H zwischen V_0 und V_1 gibt derart, dass $H(x,t) \neq 0$ für alle $x \notin K$ und $t \in I$, dann gilt $\mathrm{ind}(V_0) = \mathrm{ind}(V_1)$.


Der Beweis ist doch sehr leicht. Man nenne n die Anzahl der Knoten und bezeichne sie in der Folge, wie man sie trifft, indem man die Curve in einem angenommenen Sinne der Bewegung durchläuft, durch $1, 2, 3, \ldots n$. Da bei dieser Bewegung jeder Knoten zweimal getroffen wird, so sei Ω die aus $2n$ Gliedern bestehende Reihe dieser Zahlen, indem man das Zeichen $+$ beischreibt, so oft man auf die innere (rechte) Seite des durchschnittenen Arms kommt, sonst $-$. Man zähle die $+$ und $-$Zeichen bloss da zusammen, wo die Zahlen zum erstenmal vorkommen und habe so $+\ \alpha$-, $-\ \beta$mal. Indem man nun die Charactere des Theils der Curve, der zunächst vor dem ersten Knoten liegt, durch γ, γ' ausdrückt, ist die Amplitudo der ganzen Curve

$$= (\gamma + \gamma' + \alpha - \beta)\, 360^0.$$

Gauss einige Zeit später