

Lineare Algebra I

Mitschriften-Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

Überblick

1. Lineare Gleichungssysteme
2. Vektorräume (und Körper)
3. Basen, Dimensionen, lineare Unabhängigkeit
4. Lineare Abbildungen und Matrizen
5. Gruppen, Ringe und Algebren
6. Determinanten
7. Eigenwerte und Eigenvektoren
8. Normalenform
9. Skalarprodukt
10. Hauptachsentransformationen

Achtung:

Diese Version des Skriptes ist nicht vollständig korrigiert! Verbesserungsvorschläge, Rechtschreibfehler und inhaltliche Fehler dürfen gerne an linaskript@tauradian.de geschickt werden. Wir freuen uns über Rückmeldung!

Vorwort

Lineare Algebra:

- Theorie der linearen Gleichungssysteme
- Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen
- Theorie der Matrizen und Vektoren
- Unbekannte / Variablen x kommen nur zur ersten Potenz vor
- Keine gemischten Terme $x_i \cdot x_j$

1 Gleichungssysteme

1.1 Rechnen im \mathbb{R}^n

1.1.1 Algebraische Aspekte

Definition 1.1. Grundkörper $\mathbb{R} = \text{reelle Zahlen}$

Definition 1.2. Der $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ besteht aus Elementen, die man sich auf zwei Weisen vorstellt:

- (i) Zahlentupel = Zeilenvektoren: $x = (x_1, \dots, x_n)$
– $x_i =$ Einträge, Koordinaten, Komponenten
z.B. Punkte im $\mathbb{R}^3 : P = (x_1, x_2, x_3)$

- (ii) Spaltenvektoren: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Für beide Auffassungen gibt es nun Operationen, wir notieren sie für einen Spaltenvektor:

- Addition: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
– Skalierung: $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$
– Nullvektor: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Unterschied: Wird bei der Matrizenmultiplikation deutlich werden.

Satz 1.3. Rechenregeln

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$-x = (-1) \cdot x$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$$

Definition 1.4. Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ definiert man ein sogenanntes **Skalarprodukt**: $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle :=$

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$\langle x, y \rangle$ ist linear in x (bei festem y) und linear in y (bei festem x). Das nennt man bilinear.

Satz 1.5. Rechenregeln

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle 0, y \rangle &= 0 \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \cdot \langle x, y \rangle \\ \langle x, \mu y \rangle &= \mu \cdot \langle x, y \rangle \\ (\forall y : \langle x, y \rangle = 0) &\implies x = 0\end{aligned}$$

Beweis. Angenommen $x \neq 0 \implies \exists i : x_i \neq 0$.

$$\text{Setze } y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } y_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Dann gilt $0 = \langle x, y \rangle = x_i \cdot y_i = x_i$. Widerspruch. □

Das waren algebraische Aspekte (unabhängig von \mathbb{R} , gilt in jedem Körper \mathbb{K} bzw. in seinem Spaltenvektorraum K^n)

1.1.2 Geometrische Aspekte

Definition 1.6.

- *Betrag:* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$. Diese Formel ist die Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras im \mathbb{R}^n
- *Winkelmessung:* $\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, ($x, y \neq 0$)

- *Matrix* = rechteckiges Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Der erste Index zählt die Zeilen, der zweite Index zählt die Spalten.

Spalte: $S_j(A)$ j -te Spalte

Zeile: $Z_i(A)$ i -te Zeile

- *Nullmatrix* alle Einträge 0
- *Skalierung* von Matrizen: $\lambda \cdot A =$ jedes Element mit Lambda multiplizieren
- Addition, Subtraktion von Matrizen erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann als Riesenspaltenvektor oder Riesenzeilenvektor oder Mittelweg mit n Spalten und m Zeilen aufgefasst werden.

Das Produkt einer $(m \times n)$ -Matrix A mit einem Spaltenvektor x liefert einen neuen Spaltenvektor:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Satz 1.7. Wir betrachten die Multiplikation mit einem festem A als Funktion als Funktion $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$.

- $T_A(0) = 0$
- $T_A(\lambda x) = \lambda T_A(x)$
- $T_A(x' + x'') = T_A(x') + T_A(x'')$

1.1.3 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.8. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von m Gleichungen in n Unbekannten x_1, \dots, x_n der Art:

$$\begin{array}{ll} (G_1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ (G_m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Die a_{ij} mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ heißen Koeffizienten die $b_i = 1, \dots, m$ heißen Werte des LGS. Wichtig: alles ist durchnummeriert.

Kompakte Schreibweise

$A = (a_{ij}) =$ Matrix der Koeffizienten

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$ Spaltenvektor der Unbekannten

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektor der Werte

$$A \cdot x = b$$

Notation:

Gegeben A und b

$(A|b) =$ erweiterte Matrix

Definition 1.9. Ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, der simultan alle Gleichungen löst, heißt Lösung des LGS.

$$\mathcal{L}(A|b) := x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | Ax = b \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 1.10. 1. $A \in \mathbb{R}^{n \cdot m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$

2. Alles ist durchnummeriert

3. Es ist möglich, dass alle Koeffizienten = 0 sind: $A = 0$ ("triviales" LGS)

$$\mathcal{L}(0|b) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & b = 0 \\ \emptyset, & b \neq 0 \end{cases}$$

4. Es ist möglich, dass eine Zeile von A null ist.

$$b_j = 0 \implies \text{Diese Gleichung ist überflüssig, } b \neq 0 \implies \mathcal{L}(A|b) = \emptyset$$

5. Es kann sein, dass eine Spalte von A null ist

$$a_{1i} = a_{2i} = \dots = 0 \implies x_i \text{ "überflüssig"}$$

Definition 1.11. Ist $b = 0$, so heißt das LGS $(A|0)$ homogen. Ist $b \neq 0$ so heißt das LGS inhomogen.

Bemerkung 1.12. Was hat das alles mit $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu tun?

$$x \mapsto y := A \cdot x$$

1. $(A|b)$ hat eine Lösung (d.h. $\mathcal{L}(A|b) \neq \emptyset$) genau dann, wenn $b \in \text{Bild}(T_A) = T_A(\mathbb{R}^n) =$ Wertemenge gibt, es also ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $T_A(x) = b$ gibt.

2. $0 \in \mathcal{L}(A|0)$ (d.h. $\mathcal{L}(A|0) \neq \emptyset$)

Ein homogenes System hat immer mindestens eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $x = 0$.

1.1.4 Struktur der Lösungsmenge

Satz 1.13. (homogener Fall)

(i) $(A|0)$ hat immer die triviale Lösung

(ii) $x \in \mathcal{L}(A|0) \implies \lambda x \in \mathcal{L}(A|0)$

(iii) $x, x' \in \mathcal{L}(A|0) \implies x + x' \in \mathcal{L}(A|0)$

Satz 1.14. (inhomogener Fall)

(i) $x, x' \in \mathcal{L}(A|b) \implies x - x' \in \mathcal{L}(A|0)$

(ii) Sei $\bar{x} \in \mathcal{L}(A|b)$

- $\tau(j) = \tau(j-1)$ oder $\tau(j) = \tau(j-1) + 1$ ($1 \leq j \leq n$) Stufenhöhe ≤ 1

Eine Matrix $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist in Zeilenstufenform, wenn es eine Treppenfunktion τ gibt, sodass gilt:

- (ZSF 1) $a_{ij} = 0$ für $i > \tau(j)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)
- (ZSF 2) $a_{ij} \neq 0$ für $i = \tau(j)$, falls $\tau(j) > \tau(j-1)$ ($1 \leq j \leq n$)

Bemerkung 1.16. Wir werden zwar den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|b)$ anwenden, aber die Treppenfunktion bezieht sich nur auf A ; wie werden sagen, $(A|b)$ sei in Zeilenstufenform, wenn A in Zeilenstufenform ist.

Bemerkung 1.17. • Wir nennen die Stellen $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, an dem τ springt (also $\tau(j_k) = \tau(j_k - 1) + 1$) die Sprungstellen.

- Die Anzahl der Sprungstellen nennen wir den Rang $\text{rg}(A) = r$ der Matrix (oder auch Zeilenrang); es ist immer $0 \leq r \leq m, n$

Gauß-Algorithmus

Eingabe $(A|b)$

$A \in \text{Mat}_{m,n}(A), b \in \mathbb{R}^m$

Start: Setze $p \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ (Hilfsvariablen)

1. Suche in den Spalten $S_j(A)$ in der Reihenfolge $j = q + 1, \dots, n$ einen Eintrag $a_{ij} \neq 0$ in der Reihenfolge $i = p + 1, \dots, m$.
 - Gibt es kein solchen a_{ij} , so gehe zu ENDE.
 - Sei $a_{ij} \neq 0$ mit j minimal unter $q < j \leq n$ und i minimal unter $p < i \leq m$
2. Vertausche Zeile i mit Zeile $p + 1$
3. Subtrahiere von Zeile $i + 1$ das $\frac{a_{p+1,q}}{a_{p,q}}$ -fache der Zeile p .
 Subtrahiere von Zeile $i + 2$ das $\frac{a_{p+2,q}}{a_{p,q}}$ -fache der Zeile p .
 ...
 Subtrahiere von Zeile m das $\frac{a_{m,q}}{a_{p,q}}$ -fache der Zeile p .
4. Setze $p \rightarrow p + 1, q \rightarrow j$.
 - Ist $p = m$ oder $q = n$, gehe zu ENDE
 - Sonst gehe zu 1.

ENDE.

Ausgabe: $(A'|b')$ in Zeilenstufenform.

Bemerkung 1.18. Man nennt das a_{ij} in 1. ein Pivotelement.

Satz 1.19. Jedes LGS $(A|b)$ wird durch den Gauß-Algorithmus in ein äquivalentes LGS $(A'|b')$ mit gleicher Lösungsmenge überführt.

Beweis. 1. Zunächst ist offensichtlich, dass für $A = 0$ das LGS $(0|b)$ bereits in Zeilenstufenform ist, und zwar für die konstante Treppenfunktion $\tau(0) = \tau(1) = \dots = \tau(n) = 0$. Wie führen den Beweis durch Induktion über m .

2. Für $m = 1$ und $A \neq 0$ sei $a_{11} = \dots = a_{1,j-1} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$. Dann ist A bereits in Zeilenstufenform mit $\tau(0) = \dots = \tau(j-1) = 0$ und $\tau(j) = \dots = \tau(n) = 1$.

3. Für $m > 1$ führt ein erster Durchlauf des Gauß-Algorithmus für $A \neq 0$ an einem ersten Pivotelement $a_{i_1 j_1} \neq 0$. Nach Vertauschen und den Subtraktionen haben wir ein System und eine partiell definierte Treppenfunktion. Der zweite Durchlauf des Gauß-Algorithmus ist eigentlich ein erster Durchlauf auf das neue System. Dieses hat noch $m - 1$ Zeilen. Nach Induktion wird es in Zeilenstufenform überführt.

□

2 Körper und Vektorräume

2.1 Körper

2.1.1 Körperaxiome und Unterkörper

Definition 2.1. Ein *Körper* ist eine Menge \mathbb{K} mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition), \cdot (Multiplikation), die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Addition $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$
 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
 2. $a + b = b + a$ (Kommutativität)
 3. Es gibt ein neutrales Element der Addition $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} + x = x$. Dieses bezeichnen wir mit 0.
 4. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{K}$, sodass $x + (-x) = 0$. (Existenz von additiv Inversen)
- Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$
 5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität)
 6. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität)
 7. Es gibt ein neutrales Element der Multiplikation $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} \cdot x = x$. Dieses Element bezeichnen wir mit 1.
 8. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{K}$, sodass $x \cdot x^{-1} = 1$. (Existenz von multiplikativ Inversen)
- Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation
 9. $a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot c$ (Distributivität)
 10. $1 \neq 0$

Definition 2.2. Eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$ eines Körpers \mathbb{K} nennen wir *Unterkörper*, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $x, y \in \mathbb{K}' \Rightarrow x + y \in \mathbb{K}', x \cdot y \in \mathbb{K}'$ (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation)
2. $0, 1 \in \mathbb{K}'$
3. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow -x \in \mathbb{K}'$
4. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{K}'$

Bemerkung 2.3. Wie wir es aus der Schule gewohnt sind, schreiben wir vereinfachend $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$. Dies sind jedoch erstmal nur Notationen, da wir keine Verknüpfung $-$, oder $/$ definiert haben.

Beispiel 2.4. Beispiele für Körper, die uns allen geläufig sind sind die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, oder auch die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, welche wir im nächsten Abschnitt definieren werden. Ein Beispiel für einen Teilkörper von \mathbb{R} , der nicht der Körper rationalen Zahlen ist, ist $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$, wobei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

2.1.2 Komplexe Zahlen

Definition 2.5. Der Körper der *komplexen Zahlen* \mathbb{C} besteht aus der Menge \mathbb{R}^2 zusammen mit den Verknüpfungen

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y)$

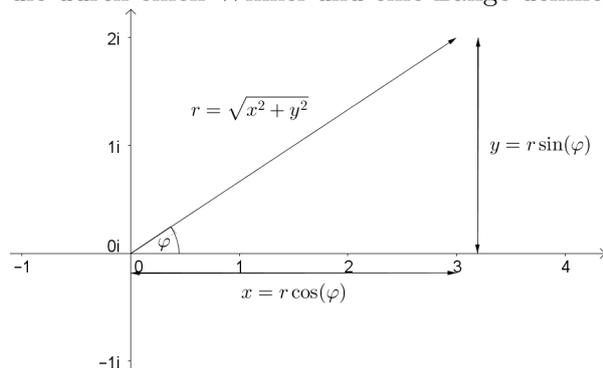
Es ist:

- $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
- $1_{\mathbb{C}} = e_1 = (1, 0)$
- $-(x, y) = (-x, -y)$
- $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

wie sich jeweils leicht nachrechnen lässt. Des weiteren stellen wir fest, dass $(e_2)^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0)$ und nennen e_2 die *imaginäre Einheit* i . Wir schreiben $(x, y) = x + iy$.

Dass für Addition und Multiplikation die gewünschten Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) gelten lässt sich leicht nachrechnen.

Definition 2.6. $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ kann als Zahl in der Gaußschen Zahlenebene interpretiert werden, die durch einen Winkel und eine Länge definiert ist.



mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist diese Darstellung eindeutig, wobei

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \\y &= r \sin(\varphi)\end{aligned}$$

r und φ nennen wir die *Polarkoordinaten* von z . Wir schreiben $z = (r; \phi)$

2.1.3 Endliche Körper

Bemerkung 2.7. Nachdem alle Körper, die uns bis hier hin begegnet sind unendlich viele Elemente hatten wollen wir nun versuchen zu einer Primzahl p einen Körper mit genau p Elementen, also einen endlichen Körper zu finden.

Definition 2.8. Man kann zeigen, dass es zu gegebenen $n, z \in \mathbb{Z}, n > 1$ eindeutige Zahlen $a, r \in \mathbb{Z}$ gibt mit $0 \leq r < n$, sodass $z = an + r$. Dies ist die Division durch n mit Rest r . Für ein gegebenes n wollen wir alle Zahlen als gleich auffassen, bei denen r gleich ist und sie in einer Menge zusammenfassen. Wir bezeichnen die Menge

$$[z] = \{z' \in \mathbb{Z} | z' = a'n + r, a' \in \mathbb{Z}\} = \{z' \in \mathbb{Z} | z' - z \text{ ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

als die *Restklasse von z modulo n* . Und nennen $z' \in [z]$ *Repräsentant* der Restklasse.

2.1.4 Inverse in \mathbb{F}_p

Satz 2.9. *Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $0 < b < a$, dann gilt:*

1. *Der $ggT(a, b)$ ist der letzte nicht verschwindende Rest r_n der folgenden Kette von Divisionen-*

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_1 < b; q_1, r_1 \in \mathbb{N}$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_2 < r_1; q_2, r_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{mit-Rest} \quad r_1 = q_3 r_2 + r_1$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}; q_n, r_n \in \mathbb{N}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n \quad \text{mit} \quad q_{n+1} \in \mathbb{N}$$

2. *Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft*

$$ggT(a, b) = \alpha a + \beta b.$$

Beweis.

- Da die r_i strikt fallend, denn $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n > r_{n+1} = 0$, bricht der Algorithmus ab. Ist $t \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von a und b , so ist t auch Teiler von r_1 und damit auch von r_2 usw. bis schließlich r_n . Umgekehrt gilt: Ist t Teiler von r_n , so auch von r_{n-1}, r_{n-2} , usw. bis a und b .
- Löse die Gleichung rückwärts auf und setze ein. □

2.1.5 Charakteristik eines Körpers

Bisher konnte man den Eindruck gewinnen als läge $\lambda \in \mathbb{N}$ in \mathbb{K} , da öfters schon so gerechnet wurde. Dies ist nicht so. Zwar gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sind keine Teilmenge von \mathbb{F}_p . Daher soll von jetzt an als Vereinbarung gelten, dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$nx := x + x + \dots + x \text{ (n-mal)}.$$

Dies ist also nicht die Multiplikation von Körperelementen. Nun das Ganze etwas genauer in folgender

Definition 2.10. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\varepsilon_0 := 0$$

$$\varepsilon_1 := 1$$

$$\varepsilon_{n+1} := \varepsilon_n + 1 \quad (n \geq 1)$$

$$\varepsilon_n := -\varepsilon_{-n} \quad (n \leq -1)$$

Also

$$\varepsilon_n := n \cdot 1$$

Definition 2.11. Falls kein $\varepsilon_n = 0$ mit $n > 0$, so hat \mathbb{K} die *Charakteristik* 0, und schreibt

$$\text{char}(\mathbb{K}) = 0.$$

Andernfalls nennt man das kleinste $n \geq 1$ mit $\varepsilon_n = 0$ die *Charakteristik* von \mathbb{K} , schreibe

$$\text{char}(\mathbb{K}) = n.$$

Beispiel 2.12. 1. $\text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = \text{char}(\mathbb{C}) = 0$

2. $\text{char}(\mathbb{F}_p) = p$ (p ist eine Primzahl)

Bemerkung 2.13. Ist $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, so ist \mathbb{Q} ein Unterkörper.

Denn

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \frac{n}{m} &\longmapsto \varepsilon_n \cdot \varepsilon_m^{-1}, \end{aligned}$$

so ergibt sich $\varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ und $\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b = \varepsilon_{ab}$ und somit erhält man ein $\mathbb{K}' = \{x - \varepsilon_n \cdot \varepsilon_m^{-1} \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0\}$ mit $\varepsilon_0 = 0$ und $\varepsilon_1 = 1$.

Definition 2.14. Eine Funktion $\phi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}'$ zwischen zwei Körpern heißt *Körperhomomorphismus*, falls gilt

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
2. $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$
3. $\phi(0) = 0$ und damit auch $\phi(-x) = -\phi(x)$
4. $\phi(1) = 1$ und damit auch $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, falls ϕ injektiv und $x \neq 0$

Beispiel 2.15. $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto (x, 0)$ ist ein *Körperisomorphismus* auf einem Unterkörper.

Satz 2.16. Ist $\text{char}(\mathbb{K}) > 0$, so ist $\text{char}(\mathbb{K})$ eine Primzahl.

Beweis. Sei $\text{char}(\mathbb{K}) = n$ mit $n > 0$ und $n = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ sowie $1 < a, b < n$. Das heißt n ist keine Primzahl. Dann wäre $0 = \varepsilon_n = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b$ mit $\varepsilon_a, \varepsilon_b \neq 0$ und somit gäb es einen Nullteiler. \square

2.2 Vektorräume

2.2.1 Vektorraumaxiome

Im folgenden Abschnitt ist mit \mathbb{K} immer ein Körper gemeint.

Definition 2.17. Ein *Vektorraum* V über \mathbb{K} ist eine Menge mit einer Verknüpfung und einer Operation.

Addition:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \text{ mit } (x, y) \longmapsto x + y$$

Skalierung:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \text{ mit } (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x, y \in V : x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists 0 \in V \forall x \in V : x + 0 = x = 0 + x$
4. $\forall x \in V \exists -x : x + (-x) = 0 = (-x) + x$
5. $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
6. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V : \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
8. $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

Proposition 2.18. 1. $0 \cdot x = 0$

2. $\lambda \cdot 0 = 0$

3. $(-1) \cdot x = -x$

4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in V : \lambda \cdot x = 0 \implies \lambda = 0 \text{ oder } x = 0$

Beweis. Übungsaufgabe □

Beispiel 2.19.

1. \mathbb{K}^n mit $n > 0$ ist ein Vektorraum. Denn die Addition ist definiert durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und die Skalierung durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$. Die Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

2. Insbesondere ist $\mathbb{K}^0 = \{0\}$ der *triviale* Vektorraum und \mathbb{K}^1 Vektorraum über sich selbst.

3. Auch $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit festem $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein Vektorraum. Auch hier lassen sich Addition und Skalierung sowie deren Eigenschaften leicht nachweisen.

Bemerkung 2.20. Vektorräume über \mathbb{Q} , \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} nennt man *rational*, *reell* bzw. *komplex*.

2.2.2 Unterraum

Sei V im Folgenden ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Definition 2.21. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Unterraum* von V , falls gilt

1. $u, u' \in U \implies u + u' \in U$ (abgeschlossen unter der Addition)

2. $\lambda \in \mathbb{K} u \in U \implies \lambda \cdot u \in U$ (abgeschlossen unter Skalierung)

Bemerkung 2.22. Sei $u \in U$ beliebig und $\lambda = 0$, dann folgt daraus $0 \cdot u = 0 \in U$.

Beispiel 2.23.

1. $U = 0 = \{0\}$ ist Unterraum in jedem Vektorraum.

2. $V = \mathbb{K}^n$, $i = 1, \dots, n$ $U_i := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0\}$ ist Unterraum von V .
 $U_I := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0 \text{ für } i \in I\}$ $I \subset 1, \dots, n$ ist Unterraum von V .

3. $V = \mathbb{K}^n$ $U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ ist Unterraum von V .

4. $v \in V$ $U = \{tv | t \in \mathbb{K}\}$ ist Unterraum von V . Diesen Unterraum bezeichnet man auch als *Spann* bzw. *lineares Erzeugnis* von v . Manchmal nennt man ihn auch *lineare Hülle* von v . Doch dazu später mehr.

5. Sei $u, v, w \in V$, dann ist $U = Span(u, v, w) = \{x = \lambda u + \mu v + \nu w \in V | \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}\}$

6. $(A|0)$ sei homogenes LGS und $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, dann ist $L(A|0) \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum.

7. U_1, U_2 seien Unterräume von V , dann ist auch $U = U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V .

Allgemeiner: $U_i \subset V$ $i \in I \implies U := \bigcap_{i \in I} U_i$. I muss nicht endlich sein. **Achtung!** Die Vereinigung von Unterräumen sind im Allgemeinen keine Unterräume mehr. Als einfaches Beispiel dafür dienen hier die beiden Koordinatenachsen des \mathbb{R}^2 als Unterräume. Addiert man nämlich $(1, 0)$ aus dem x-Achsen-Unterraum zu $(0, 1)$ aus dem y-Achsen-Unterraum, so erhält man $(1, 1)$. $(1, 1)$ liegt aber nicht in der Vereinigung von den beiden

Koordinatenachsen. **Achtung!** Auch das mengenmäßige Komplement ist im Allgemeinen kein Unterraum. Das orthogonale Komplement allerdings schon. Denn sei $V = \mathbb{R}^n$ und

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}, \text{ dann ist } U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 n_1 + \dots + x_n n_n = 0\}$$

8.

2.2.3 Körperwechsel

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \times & \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \\ \downarrow & & \downarrow \parallel \\ \mathbb{L} & \times & \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x & & \\ \downarrow & & \parallel \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x & & \end{array}$$

2.3 Lineare Abbildungen

Im folgenden bezeichne \mathbb{K} einen Körper; V und W seien Vektorräume über \mathbb{K} (Man sagt auch: \mathbb{K} -Vektorräume).

Definition 2.24. Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ ist eine *lineare Abbildung*, falls gilt:

- (i) $f(0) = 0$
- (ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mit $x, y \in V$
- (iii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$.

Hierbei folgt (i) offensichtlich aus (iii): $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Lineare Abbildungen sind die zentralen Objekte der linearen Algebra; man könnte diese auch als Studium der linearen Abbildungen bezeichnen. Wir betrachten nun einige Beispiele:

Beispiel 2.25. 1. Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor x , wie wir sie bereits direkt zu Beginn eingeführt haben, ist eine lineare Abbildung: $V = \mathbb{K}^n$; $W = \mathbb{K}^m$; $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$

$$f = T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto A \cdot x$$

2. Für ein $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ haben wir ein lineares Gleichungssysteme studiert. Ein Ergebnis war $W = \mathcal{L}(A|0) \subseteq \mathbb{K}^n$, die Lösungsmenge im homogenen Fall ist ein Untervektorraum. Mit $r = \text{rg}(A)$ und $l = n - r$ erhalten wir die bekannte Parameterdarstellung des Lösungsraums als lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^l &\longrightarrow \mathcal{L}(A|0) \\ u &\longmapsto L(u) \end{aligned}$$

Diese lineare Abbildung ist außerdem bijektiv. (Eine solche Abbildung nennt man auch *Isomorphismus*.)

3. Geometrische Beispiele: Drehung, Streckung, Scherung und Spiegelung im \mathbb{R}^2 lassen sich als Matrizenmultiplikation darstellen und sind somit lineare Abbildungen.

$$f = T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto A \cdot x$$

Die zur Drehung um ϕ assoziierte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur Streckung um λ_1 entlang der x -Achse und um λ_2 entlang der y -Achse ist:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Bei der Scherung bleibt eine Achse erhalten, in diesem Beispiel die x -Achse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \alpha x + y \end{pmatrix}$$

Zur Spiegelung an der y -Achse betrachte man

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

die Spiegelung an der Winkelhalbierenden ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Auch die Projektion ist eine lineare Abbildung. Jeder Vektor $v \in V = \mathbb{R}^2$ kann eindeutig geschrieben werden als $v = w + w'$ mit $w \in W$ und einem Vektor w' , der auf der Geraden liegt, die von \tilde{w}' aufgespannt wird. Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 = V \rightarrow W, w + w' = v \rightarrow w$ ist eine (surjektive!) lineare Abbildung.

4. Analytische Beispiele

Auf dem Vektorraum $V = C^{q+1}(\mathbb{R})$ der $(q+1)$ -mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen (mit der Addition $(f+g)(x) := f(x)+g(x), f, g \in V$) ist die Ableitung eine lineare Abbildung:

$$D : C^{q+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^q(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f'$$

Hierbei bezeichnet $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ die Ableitung von f nach x . Wegen der bekannten Ableitungsregeln, dass die Ableitung der Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, und dass die Ableitung einer skalierten Funktion gleich der skalierten Ableitung ist, sind Ableitungen lineare Abbildungen. Insbesondere gilt für beliebig oft differenzierbare Funktionen ($q = \infty$):

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f'$$

Auf dem Vektorraum $V = L^1([0, 1])$ der über $[0, 1]$ integrierbaren Funktionen ist die Integration eine lineare Abbildung.

$$I : L^1([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_b^a f(x)dx$$

mit $a, b \in [0, 1]$. Hier gilt die analoge Regel, dass das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale ist.

Betrachten wir als letztes Beispiel $V = \mathcal{F}_{konv}$, den Vektorraum der reellen konvergenten Folgen $a = (a_0, a_1, \dots)$. Die Grenzwertbildung ist eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \lim : V = \mathcal{F}_{konv} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a = (a_n) = (a_0, a_1, \dots) &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

Die Summe zweier konvergenter Folgen ist wieder eine konvergente Folge, also ist die Grenzwertbildung eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} (a_n) &\longmapsto \lim a_n, \quad b_n \longmapsto \lim b_n \\ (a_n) + (b_n) &\longmapsto \lim a_n + \lim b_n. \end{aligned}$$

Proposition 2.26. Es seien U, V, W Vektorräume über \mathbb{K} , dann gilt:

- (i) Die Identität $\text{id}_V : V \rightarrow V, x \mapsto x$ ist linear.
- (ii) Sind $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen, dann auch die Verknüpfung $g \circ f : U \rightarrow W$.
- (iii) Die Nullabbildung $0 : V \rightarrow W, x \mapsto 0$ ist eine lineare Abbildung.
- (iv) Sind f, f' lineare Abbildungen, dann ist auch λf , definiert durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}$, wieder eine lineare Abbildung.
- (v) Genauso ist auch $f + f'$ mit $(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$ eine lineare Abbildung. Beides folgt einfach aus der Tatsache, dass f und f' lineare Abbildungen sind (f' ist *nicht* die Ableitung von $f!$).
- (vi) Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare bijektive Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \rightarrow V$ linear.

Beweis von Proposition (vi). Zu zeigen: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. Seien $x, y \in W$. Da f bijektiv ist gilt: $\exists! x', y' \in V : x = f(x'), y = f(y')$; „ $\exists!$ “ bedeutet „es gibt eindeutig“. Dann folgt mit der Linearität von f :

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(f(x') + f(y')) = f^{-1}(f(x' + y')) = x' + y' = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

Damit haben wir die Bedingung (ii) aus Definition

Definition 2.27. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

- (i) Die Teilmenge von W $\text{im}(f) = f(V) := \{x \in W \mid x = f(x') \text{ für } x' \in V\} \subseteq W$ heißt *Bild von f* (engl. *image*).
- (ii) Die Teilmenge von V $\text{ker}(f) = f^{-1}(0) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subseteq V$ heißt *Kern von f* (engl. *kernel*).

Proposition 2.28. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

- (i) Das Bild $\text{im}(f)$ ist ein Untervektorraum in W .
- (ii) Der Kern $\text{ker}(f)$ ist ein Untervektorraum in V .
- (iii) Ist $b \in \text{im}(f)$ und etwa $f(\xi) = b$, so ist $f^{-1}(b)$ ein affiner Unterraum und zwar $f^{-1}(b) = \text{ker}(f) + \xi$.

Ein Spezialfall von (iii) ist, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems im inhomogenen Fall ein affiner Unterraum ist.

Beweis. (i) Seien $x, y \in \text{im}(f)$, sodass $x = f(x'), y = f(y')$ für $x', y' \in V$. Daraus folgt, dass $x + y = f(x') + f(y') = f(x' + y')$. Also liegt $x + y$ im Bild von f .

(ii) Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y) = 0$, also $x, y \in \ker(f)$. Dann gilt $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$. Damit liegt auch $x + y$ im Kern von f .

(iii) Sei $b \in \text{im}(f)$ mit $f(\xi) = b$. Für $x \in V$ mit $f(x) = b$ gilt:

$$f(x - \xi) = f(x) - f(\xi) = b - b = 0$$

Also liegt $x - \xi$ im Kern von f . □

Beispiel 2.29. Betrachten wir wieder die Matrizenmultiplikation: $f = T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto T_A(x) = A \cdot x$ mit $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\ker(T_A) = T_A^{-1}(0) = \mathcal{L}(A|0)$. Der Kern ist der Lösungsraum des assoziierten linearen Gleichungssystems im homogenen Fall.
- $\text{im}(T_A) = \{b \in \mathbb{K}^m | \mathcal{L}(A|b) \neq \emptyset\}$. Das Bild ist die Menge der Vektoren, für die das assoziierte lineare Gleichungssystem im inhomogenen Fall lösbar ist.
- Falls $b \in \text{im}(T_A)$ mit etwa $T_A(\xi) = b$, so ist $T_A^{-1}(b) = \mathcal{L}(A|b) = \mathcal{L}(A|0) + \xi$, der Lösungsraum des inhomogenen und lösbaren Falls.

Beispiel 2.30. Die *komplexe Konjugation* $\bar{}$ ist ein Beispiel für eine Abbildung, die \mathbb{R} -linear, aber nicht \mathbb{C} -linear ist.

$$\begin{aligned} \bar{} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$

Die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus, denn

$$\overline{0} = 0; \overline{1} = 1; \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ (Multiplikativität).}$$

\mathbb{C} -Linearität würde bedeuten $\overline{z_1 z_2} = z_1 \cdot \overline{z_2}$. Die Abbildung kann also nicht sowohl ein Körperisomorphismus sein als auch \mathbb{C} -linear. Da die komplexe Konjugation multiplikativ ist, ist sie lediglich \mathbb{R} -linear:

$$\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z} \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} = \text{Fix}(\bar{})$$

Definition 2.31. Seien V, W Vektorräume über \mathbb{K} . Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt *affin*, falls es eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ gibt, und ein $b \in W$ mit $f(x) = \varphi(x) + b$.

Beispiel 2.32.

1. Die Translation $\tau_b : W \rightarrow W$ mit $0 \neq b \in W, w \mapsto w + b$ ist immer eine affine Abbildung
2. Die Abbildung $f(x) = mx + b$ mit $m \in \mathbb{K}$ ist eine affine Abbildung. *Achtung!*: In der Schule und der Analysis werde solche Funktionen als lineare Funktionen bezeichnet. In der linearen Algebra sind dies aber im allgemeinen affine Funktionen!
3. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Lösungsmenge $\mathcal{L}(A|b)$ eines Linearen Gleichungssystems $(A|b)$ der Größe $m \times n$, wobei $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^m, r = \text{rg}(A), l = n - r$. Es sei L^0 die Parameterdarstellung für den homogenen Fall, also

$$L^0 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{L}(A|0); U = (U_0, U_1, \dots, U_r) \mapsto L^0(U) = (U_0, L_1, U_1, L_2, U_2, \dots, L_r, U_r)$$

wobei $L_1 = L_1(U_1, U_2, \dots, U_r), L_2 = L_2(U_2, U_3, \dots, U_r), \dots, L_r = L_r(U_r)$ Nun suchen wir uns irgend eine Lösung $\xi \in \mathcal{L}A|b$ des inhomogenen Gleichungssystems. Für den Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems gilt nun:

$$L = L^0 + \xi; L(U) = L^0(U) + \xi$$

4. Es sei f eine affine Abbildung. Offenbar ist $f(0) = b$ die Translationskonstante, während $f(x) - b = \Phi(x)$ der so genannte lineare Anteil ist. Damit hat man für affine Abbildungen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(\lambda x) - b &= \lambda(f(x) - b) \\ f(x + y) - b &= (f(x) - b) + (f(y) - b) = f(x) + f(y) - 2b \end{aligned}$$

5. Ist f eine lineare Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein linearer Unterraum.
Ist f eine affine Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein affiner Unterraum.

Proposition 2.33. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Unterkörper von \mathbb{L} (genau wie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) und V ein Vektorraum über \mathbb{L} . Wir wissen, dass V dann auch ein \mathbb{K} -Vektorraum ist. Es kommt aber vor, dass eine Funktion $f : V \rightarrow W$ zwar linear ist, wenn man V als \mathbb{K} -Vektorraum betrachtet, es jedoch nicht ist, wenn man V als \mathbb{L} -Vektorraum betrachtet.

Beispiel 2.34. Ein Beispiel für die eben genannten Funktionen ist die komplexe Konjugation über \mathbb{R} und \mathbb{C} .

$$- : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; x + iy = z \mapsto \bar{z} = x - iy$$

Diese Abbildung ist \mathbb{R} -Linear, da man leicht nachrechnen kann, dass $\lambda(x, y) \mapsto (x, -y)$. Sie ist jedoch nicht \mathbb{C} -Linear, wie man leicht am Beispiel der Multiplikation mit i sieht. Es ist:

$$i \cdot \overline{(x, y)} = i \cdot (x, -y) = (x, y) \neq (-x, -y) = \overline{(-y, x)} = \overline{i \cdot (x, y)}$$

Abgesehen von der Linearität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl besitzt die komplexe Konjugation aber viele nützliche Eigenschaften. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \bar{0} &= 0, \bar{1} = 1 \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

2.3.1 Morphismen

Definition 2.35. Es sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann heißt f

Monomorphismus, wenn f injektiv

Epimorphismus, wenn f surjektiv

Isomorphismus, wenn f bijektiv Endomorphismus, wenn $V = W$ Automorphismus, wenn $V = W$, f bijektiv

Proposition 2.36. Es seien $f : V \rightarrow W, g : W \rightarrow U$ linear. Dann gilt

- f ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker(f) = 0$
- $g \circ f$ ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ ist ein Monomorphismus
- $g \circ f$ ist ein Epimorphismus $\Leftrightarrow f$ ist ein Epimorphismus

3 Basen und Dimension

3.1 Erzeugendensystem

Definition 3.1. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $v, e_1, e_2, \dots, e_n \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad (*)$$

Wir nennen $(*)$ eine Linearkombination (der e_1, \dots, e_n über \mathbb{K}), oder eine lineare Darstellung von v (durch e_1, \dots, e_n über \mathbb{K}). Ist $v = 0$, so nennt man $(*)$ eine lineare Relation zwischen den e_1, \dots, e_n (über \mathbb{K}). Sind alle $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, so nennt man $(*)$ eine triviale Linearkombination, oder triviale Darstellung von $v = 0$, oder eine triviale Relation.

Definition 3.2. Es sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V . Dann heißt

$$Span(\xi) := \{v \in V \mid \text{Es gibt endlich viele } e_1, \dots, e_n \in \xi \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ so dass } v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\}$$

Der Spann, oder das lineare Erzeugnis von ξ in V . Wir vereinbaren, dass $Span(\emptyset) = \{0\} = 0$.

Beispiel 3.3. 1. Ist $\xi = \{0\}$, so ist $Span(\xi) = 0$

2. Ist $u \in V, u \neq 0$, so ist $Span(\{u\})$ die von u aufgespannte Gerade.

3. Sind $u_1, u_2 \neq 0$ nicht kollinear, also weder $u_1 \in Span(u_2)$ noch $u_2 \in Span(u_1)$, so ist $Span(u_1, u_2)$ eine Ebene.

4. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so nennen wir $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, \dots, 0)$ den i -ten Einheitsvektor. Für $0 \leq m \leq n$ ist $\xi_m = \{e_1, \dots, e_m\}$ und $Span(\xi_m) = \mathbb{K}^m \subseteq \mathbb{K}^n$, wobei einfach die letzten $n - m$ Koordinaten 0 sind.

5. Ist $V = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{Q}, \xi = \{1, \sqrt{2}\}$, so ist $Span(\xi) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

6. Sind $U_i \subseteq V, i \in I$ Untervektorräume eines Vektorraumes V und ist $\xi = \bigcup_{i \in I} U_i$, so nennen wir $Span(\xi) = \sum_{i \in I} U_i$ die Interne Summe der U_i

Proposition 3.4. Es Sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V

1. $0 \in Span(\xi)$

2. $\xi \subseteq Span(\xi)$ insbesondere ist $Span(V) = V$

3. $Span(U) = U$, falls U ein UVR ist

4. $Span(Span(U)) = Span(U)$

5. $Span(\xi)$ ist der kleinste UVR von V , der ξ enthält.

6. $Span(\xi)$ ist der Durchschnitt aller UVR von V welche ξ enthalten.

Definition 3.5. Eine Teilmenge \mathcal{E} heißt *Erzeugendensystem* von V , falls gilt: $Span(\mathcal{E}) = V$. V heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt

Uns interessiert dabei jedoch nur das kleinste Erzeugendensystem, beziehungsweise das *minimale Erzeugendensystem*.

Lemma 3.6. Ist \mathcal{E} ein EZS von V und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, e \in \mathcal{E}$, dann ist auch $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e\}) \cup \{\lambda \cdot e\}$ mit

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_i, \dots\}$$

$$\Downarrow \mathfrak{M}_i[\lambda]$$

$$\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots\}$$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n$$

□

Lemma 3.7. Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots\}$ ein EZS. Dann ist $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e_i\}) \cup \{e_i + e_j\}$ wieder ein EZS.

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots\}$$

$$\Downarrow \mathfrak{A}_j$$

$$\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, e_i + e_j, \dots, e_j, \dots\}$$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n$

$$= \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i (e_i + e_j) + \dots + (\lambda_j - \lambda_i) e_j + \dots + \lambda_n e_n$$

□

Lemma 3.8. Sei \mathcal{E} ein EZS von V . Es gäbe in \mathcal{E} eine nicht-triviale Relation, dh. es gibt $e_i, \dots, e_n \in \mathcal{E}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ wobei nicht alle $\lambda_i = 0$ und es gelte $0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n$ und etwa $\lambda_i \neq 0$. Dann ist $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \{e_i\}$ wieder ein EZS von V .

Beweis. Es gilt:

$$e_i = -\frac{1}{\lambda_i} (\lambda_1 e_1 + \dots + \hat{\lambda_i} e_i + \dots + \lambda_n e_n)$$

[*]

$$[*] = -\frac{1}{\lambda_i} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_{i+1} e_{i+1} + \dots + \lambda_n e_n)$$

d.h. $e_i \in \text{Span}(\mathcal{E}) = \text{Span}(\mathcal{E} - e_i)$

Also: wenn immer e_i in einer Darstellung eines $v \in V$ vorkommt gilt:

$$v = \alpha_{i_1} e_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} e_{i_k} + \dots + \alpha_{i_m} e_{i_m}$$

↓

$$= \alpha_{i_1} e_{i_1} + \dots + \alpha[*] + \dots + \alpha_{i_m} e_{i_m}$$

□

3.2 Lineare Unabhängigkeit

V = Vektorraum über \mathbb{K}

$\mathcal{B} \subseteq V$ Teilmenge

Definition 3.9. \mathcal{B} heißt *linear unabhängig* in V , falls gilt:

$b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$ sind paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Wenn $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ gilt, dann nur deshalb, weil $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung 3.10. \mathbb{B} ist NICHT "von" etwas unabhängig! Es IST linear unabhängig.

Bemerkung 3.11. Oder: Jedes b ist VON ALLEN ANDEREN linear unabhängig.

($\Leftrightarrow b$ kann nicht als Linearkombination der anderen geschrieben werden $\Leftrightarrow b \notin \text{Span}(\mathcal{B}, \{b\})$)

Bemerkung 3.12. Man sagt: Es gibt keine nicht-triviale Relation unter den Elementen von \mathcal{B} .

Bemerkung 3.13. Die Eigenschaft linearer Unabhängigkeit kommt in der Menge \mathcal{B} vor, nicht in ihren Elementen.

Bemerkung 3.14. v ist linear unabhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \notin \text{Span}(\mathcal{B})$.

v ist linear abhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \in \text{Span}(\mathcal{B})$.

Bemerkung 3.15. $0 \notin \mathcal{B}$, falls \mathcal{B} linear unabhängig.

Denn sonst $0 = \lambda \cdot 0, \lambda \neq 0$ z.B. für $\lambda = 1$

Bemerkung 3.16. Wir setzen $\mathcal{B} = \emptyset$ ist linear unabhängig.

Beispiel 3.17. $\mathcal{B} = \{b\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b \neq 0$. Jede Relation müsste lauten $\lambda \cdot b = 0$

Beispiel 3.18. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b_1, b_2 \neq 0$ mit b_1, b_2 nicht kollinear

$$b_1 = \lambda_2 b_2$$

$$b_2 = \lambda_1 b_1$$

Beides ist nicht möglich, da $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = 0$

Beispiel 3.19. $V = \mathbb{K}, \mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}, m \leq n$, Standardbasisvektoren $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, wobei 1 an i -ter Stelle steht.

\mathcal{B} ist linear unabhängig.

$$\text{Angenommen } \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

1. Koordinate

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

2. Koordinate

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

\vdots

m . Koordinate

$$\lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_m = 0$$

Satz 3.20. $\mathcal{B} \subset V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $v \in \text{Span}(\mathcal{B})$ genau eine (oder eine eindeutige) Darstellung als Linearkombination besitzt.

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ für ein geeignetes $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$, und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Beweis. Angenommen wir hätten zwei Darstellungen

$$v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} b_{i_n}$$

$$v = \lambda_{j_1} b_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$$

Dann gilt:

$$0 = v - v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} b_{i_n} - \lambda_{j_1} b_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$$

Wir fassen zusammen und kürzen weg. Deshalb können wir folgendes annehmen:

alle b_{i_r} und b_{j_r} sind paarweise verschieden und alle λ_{i_r} und $\lambda_{j_r} \neq 0$

Sind die Darstellungen verschieden, so gibt es mindestens ein $b_{i_k} = b_{j_l}$, aber $\lambda_{i_k} \neq \lambda_{j_l}$.

Dann ist die rechte Seite eine nicht triviale Relation. Aber \mathcal{B} war als linear unabhängig angenommen.

Widerspruch! \square

$$V = P_n(\mathbb{K}) \ni p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$a_i \in \mathbb{K}$ $p'(x) := a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}$ ist die formale Ableitung

$$W = P_{n-1}(\mathbb{K}) \quad P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$$

$$P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \subseteq P_n(\mathbb{K})$ sind Stamppolynome. \mathcal{B} ist ein EZS und linear unabhängig.

3.3 Basen

Definition 3.21. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$ eines VR-V über \mathbb{K} heißt *Basis von V*, falls \mathcal{B} ein EZS und linear unabhängig ist.

Bemerkung 3.22. Eine Basis ist ein minimales EZS und ein maximales linear unabhängiges System.

Beispiel 3.23. $V = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Beispiel 3.24. $V = P(\mathbb{K}) : \mathcal{B} = 1, x, x^2, \dots, x^n$

$V = \mathbb{C}/\mathbb{C} \quad \mathcal{B} = \{1\}$

$V = \mathbb{C}/\mathbb{R} \quad \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$

$V = \mathbb{C}/\mathbb{K} = \mathbb{Q} \quad \mathcal{B} = ?$

$\mathcal{B} = \{\log 2, \log 3, \log 5, \dots\}$ ist ein EZS und somit linear unabhängig.

Beispiel 3.25. Anwendung: $(A | 0) =$ homogenes LGS, $m \times n$ über \mathbb{K}

Annahme: Die Matrix ist bereits in ZSF

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeile = a_1

2. Zeile = a_2

\vdots

letzte Zeile vor Nullzeilen = a_r

$r = \text{rang}(A)$, $\pi_j =$ Pivotelemente, $j_1, \dots, j_r =$ Sprungstellen der Treppenfunktion

1. Behauptung: Die ersten r Zeilen a_1, \dots, a_r sind linear unabhängige Vektoren in \mathbb{K}^n .

2. Behauptung: Die Pivotspalten j_1, \dots, j_r sind linear unabhängig in \mathbb{K}^m .

Anwenden: $a_1, \dots, a_m \in V = \mathbb{K}^n$, $U = \text{Span}(a_1, \dots, a_n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Zeilenstufenform mit Treppenfunktion}$$

Gesucht ist eine Basis.

Nachtrag:

Lemma 3.26. $\mathcal{E} \subseteq V$. $\text{Span}(\mathcal{E})$ ist der kleinste ("kleinste obere Schranke") Untervektorraum von V , der \mathcal{E} enthält.

Beweis. Alle UVR von V bilden einen "Verband" = Menge X mit einer *Ordnungsrelation*.

D.h. wir haben:

zwischen je zwei $x_1, x_2 \in X$ kann eine Relation gelten $x_1 \leq x_2$ oder nicht. Es muss nicht Vergleichbarkeit herrschen. Es kann sein, dass weder $x_1 \leq x_2$ noch $x_2 \leq x_1$ gilt. \square

Beispiel 3.27. $X = \mathbb{R}, x_1 \leq x_2$ mit der uns bekannten Bedeutung.

Hier:

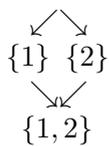
$x_1 \leq x_2$ oder $x_2 \leq x_1$ oder beides ($\Rightarrow x_1 = x_2$)

Dies nennt man eine *totale* oder *lineare Ordnung*.

Beispiel 3.28. $M =$ Menge, $\mathfrak{X} = \text{Pot}(M) =$ Potenzmenge = $\mathcal{P} =$ Menge aller Teilmengen von M .

$M = \{1, 2\}$

$\mathfrak{X} = \emptyset$



Ordnungsrelation : $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 \subseteq x_2$

Beispiel 3.29. $\mathfrak{X} = \mathbb{N}, a \leq b \Leftrightarrow a$ ist Teiler von b .

Es müssen folgende Axiome gelten:

1. Reflexivität: $x \leq y$
2. Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Ein maximales Element in \mathfrak{X} ist ein $x \in \mathfrak{X}$, sodass gilt: $x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$

Beispiel 3.30. $V = VR$ über $\mathbb{K}, \mathfrak{X} =$ Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V , Ordnungsrelation = Inklusion

Lemma 3.31. Zorn'sches Lemma

garantiert ein maximales $\mathcal{B} \in \mathfrak{X}$. Es ist dann leicht zu zeigen: \mathcal{B} ist auch ein EZS.

Beweis. Angenommen, das ist nicht so. D.h. es gibt ein UVR W mit $\mathcal{E} \subseteq W \subsetneq \text{Span}(\mathcal{E})$.

Dann gibt es ein $x \in \text{Span}(\mathcal{E})$ mit $x \notin W$, also gibt es geeignete $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Es ist aber:

alle $e_i \in W$

alle $\lambda e_i \in W$

ABER $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in W \Rightarrow$ Widerspruch! \square

Beispiel 3.32. $\text{Span}(\mathcal{E})$ ist der Durchschnitt aller UVR, die \mathcal{E} enthalten.

Beweis. Sei $U_\alpha (\alpha \in I)$: alle UVR in V mit $\mathcal{E} \subseteq U_\alpha$. Nach (1) und (2) ist $\text{Span}(\mathcal{E})$ ein solches U_α .

Also gilt: $\bigcup_{\infty} U_\alpha \subseteq \text{Span}(\mathcal{E})$.

Sei $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Span}(\mathcal{E})$ d.h. $e_i \in \bigcap_{\infty} U_\alpha$. \square

Nachtrag:

Lemma 3.33. Ist \mathcal{B} eine Basis, $b_i \in \mathcal{B}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{\lambda \cdot b_i\})$ wieder eine Basis.

Beweis. Aus Lemma 3.2 und Lemma 3.17. □

Lemma 3.34. Ist \mathcal{B} eine Basis, $b_i, b_j \in \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b_i + b_j\})$ wieder eine Basis.

Beweis. Aus Lemma 3.3 und Lemma 3.18. □

Lemma 3.35. *Austauschsatz von Steinitz*

Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_i, \dots\}$ eine Basis von V und sei $b \in V$ mit einer Darstellung $b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_i b_i + \dots + \beta_n b_n$ für $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ und etwa $\beta_i \neq 0$.

Dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b\})$ wieder eine Basis.

Beweis. Sei $v \in V$ dargestellt durch $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_i b_i + \dots + \lambda_n b_n$.

O.B.d.A. nehmen an: $n = m$ (Ergänzung durch Nullterme, falls $n \neq m$)

Dann können wir schreiben:

$$v = (\lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_i}{\beta_i}) b_1 + \dots + \hat{b}_i + \dots + (\lambda_n - \frac{\beta_n \lambda_i}{\beta_i}) b_n$$

$$\text{weil } b_i = -\frac{\beta_1}{\beta_i} b_1 - \dots - \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} b_{i-1} - 1 - \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} b_{i+1} - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_i} b_n$$

D.h. v ist auch darstellbar durch \mathcal{B}' . Ist $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_i b_i + \dots + \alpha_n b_n = 0$ eine Relation in \mathcal{B}' , so erhalten wir durch Einsetzen von b daraus eine Relation in \mathcal{B} :

$$(\alpha_1 - \alpha_i \beta_1) b_1 + \dots + \alpha_i \beta_i b_i + \dots + (\alpha_n - \alpha_i \beta_n) b_n = 0$$

Weil \mathcal{B} linear unabhängig, muss dies eine triviale Relation sein, also

$$\alpha_1 - \alpha_i \beta_1 = 0$$

⋮

$$\alpha_i \beta_i = 0 \quad \Rightarrow \alpha_i = 0 \rightarrow \text{Also } \alpha_k = 0 \text{ auch für } \alpha_1, \dots, \alpha_n$$

⋮

$$\alpha_n - \alpha_i \beta_n = 0$$

Deshalb ist \mathcal{B}' linear unabhängig. □

Satz 3.36. *Existenzsatz von Basen*

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis

Bemerkung 3.37. Wir zeigen dies hier nur für endlich abzählbar erzeugte VR über \mathbb{K} , denn dafür genügt die gewöhnliche Induktion. Für VR , die überabzählbar erzeugt sind, braucht man "transfinite Induktion". Eine Variante ist das *Zorn'sche Lemma*, welches zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz äquivalent ist. (siehe Aufgabe 35)

Beweis. (Im endlichen oder abzählbaren Fall)

Wir wählen ein abzählbares EZS $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$. (Ist V endlich erzeugt, so läuft k nur bis zu diesem einen endlichen n .) Wir betrachten technisch (algorithmisch) \mathcal{E} als eine geordnete Folge.

Wir setzen $\mathcal{E}_k := \emptyset$

$$\mathcal{E}_k := \{e_1, \dots, e_k\} \text{ für } k = 1, \dots, (n), \dots$$

Algorithmus (Basisauswahlverfahren)

$$\mathcal{B} := \emptyset$$

$$\mathcal{B}_k := \begin{cases} \mathcal{B}_{k-1} & \text{falls } b_k \in \text{Span}(\mathcal{B}_{k-1}) \\ \mathcal{B}_{k-1} \cup b_k & \text{falls } b_k \notin \text{Span}(\mathcal{B}_{k-1}) \end{cases}$$

(Falls V endlich erzeugt wird, so läuft k nur bis n .)

1. $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_{k-1}$ - nach Konstruktion

2. $\text{Span}(\mathcal{B}_k) = \text{Span}(\mathcal{E}_k)$ - nach Konstruktion und Induktion

3. \mathcal{B}_k ist linear unabhängig - nach Induktion, mit Lemma 3.19.

Wir setzen $\mathcal{B} = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^n & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist} \\ \bigcup_{k=0}^{\infty} & \text{falls } V \text{ abzählbar unendlich ist} \end{cases}$

4. \mathcal{B} ist ein EZS:

Ist $v \in V$ durch die ersten $k : e_1, \dots, e_k$ darstellbar, also $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$, so ist $v \in \text{Span}(\mathcal{E}_k) =_2 \text{Span}(\mathcal{B}_k) \subseteq_1 \text{Span}(\mathcal{B})$

5. \mathcal{B} ist linear unabhängig.

Gibt es eine Relation zwischen (endlich vielen) Elementen in \mathcal{B} , so liegen diese bereits in einem \mathcal{B}_N , weil es nur endlich viele sind.

$e_1 \in \mathcal{B}_{k_1}$

$e_2 \in \mathcal{B}_{k_2}$

\vdots

$\Rightarrow e_1, \dots, e_l \in \mathcal{B}_N, N = \max\{k_1, \dots, k_n\}$

$e_l \in \mathcal{B}_{k_l}$

Aber nach 3) ist \mathcal{B}_N linear unabhängig.

□

Bemerkung:

Das Basisauswahlverfahren (BAV) aus dem Basisexistenzsatz ist im Wesentlichen ein Algorithmus:

EINGABE: Geordnetes EZS $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ (endlich oder abzählbar)

ABFRAGE: Ist $e_{k+1} \in \text{Span}(\{e_1, \dots, e_k\})$?

Wenn nein füge ihn zur Basis hinzu.

Wenn ja füge es nicht zur Basis hinzu und betrachte e_{k+2}

AUSGABE: Geordnete Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

Beispiele:

1) $V = \text{Pol}(\mathbb{R})$ (Die Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Wähle als EZS die Stamppolynome $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$.

Behauptung: $X^{n+1} \notin \text{Span}(1, \dots, X^n)$ (Dies ist für Polynome trivial aber noch lange nicht für Polynomfunktionen!)

Um dies zu zeigen nutzen wir einen Trick der universal einsetzbar ist:

Gäbe es eine Linearkombination, so dass

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad (3.1)$$

so könnte man (1) n-mal differenzieren (bei Polynomfunktionen wendet man formales Differenzieren an) und erhält

$$(n+1)!X = a_n n! \quad (3.2)$$

Damit wäre aber bereits, wenn $X=0$ in (2) eingesetzt wird

$$0 = a_n n! \Rightarrow a_n = 0 \quad (3.3)$$

setzt man nun (3) in (1) ein und iteriert das Verfahren, erhält man, dass alle $a_i = 0$ sind, womit aber $X^{n+1} = 0$ wäre, was definitiv nicht der Fall ist.

2) Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{e^{a_k x} | k \in \mathbb{N} \text{ und } a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

3) Wiederum Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{\sin(a_k x) | k \in \mathbb{N} \text{ und } a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig ist.

4) Sei V der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0=f(0)=f(1)$

So ist $\mathcal{B} = \{Z_\xi \mid Z_\xi(x) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; Z_\xi = \begin{cases} \frac{x}{\xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{x-1}{\xi-1} & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}; \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Basis.

Es ist sehr selten, dass eine überabzählbare Basis explizit angegeben werden kann, da es im Allgemeinen sehr schwer ist mit überabzählbarer Dimension (siehe Abschnitt 3.4) zu arbeiten. So ist für $C^\infty(\mathbb{R})$ keine Hamel-Basis bekannt.

Satz 3.38 (Basisergänzungssatz). *Sei V ein endlich oder abzählbar erzeugter K -Vektorraum. So kann jede linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq V$ zu einer Basis ergänzt werden.*

Beweis. Wähle ein beliebiges geordnetes Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$, welches nach dem Basisexistenzsatz definitiv existiert und wegen Abzählbarkeit auch geordnet werden kann.

So ist offensichtlich $\mathcal{E}' = \{b_1, \dots, b_n, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ erneut ein Erzeugendensystem. Wird nun BAV auf \mathcal{E}' angewandt, so werden die b_i zuerst betrachtet und wegen linearer Unabhängigkeit als Basisvektoren gewählt. Somit gilt für die letztendliche Basis $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. \square

Beispiele:(BAV)

$$1) V = K^n; \mathcal{E} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \dots, e_1 + e_2 + \dots + e_n\}$$

$$\mathcal{B}' = \{2e_2\} \mapsto \mathcal{B} = \{2e_2, e_1, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \dots\}$$

$$2) V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}; K = \mathbb{Q}; \mathcal{E} = \{2, 2\sqrt{2}\}$$

$$\mathcal{B}'_1 = \{1 + \sqrt{2}\} \mapsto \mathcal{B}_1 = \{1 + \sqrt{2}, 2\}$$

$$\mathcal{B}'_2 = \{3\} \mapsto \mathcal{B}_2 = \{3, 2\sqrt{2}\}$$

3.4 Dimension

Unser Ziel wird es sein die Dimension eines Vektorraumes durch die Kardinalität einer Basis des Vektorraumes zu definieren.

Doch dafür müssen wir uns zunächst überzeugen, dass solch ein Dimensionsbegriff wohldefiniert ist. Nach dem Basisexistenzsatz besitzt jeder Vektorraum zumindest eine Basis, dies bereitet uns also keine Probleme. Allerdings haben wir in den Übungen eingesehen, dass ein Vektorraum sehr viele Basen besitzt.

Zwar hat \mathbb{F}_2 genau eine Basis, dieser ist aber auch der einzige neben dem trivialen Nullvektorraum mit nur einer Basis. So besitzt \mathbb{F}_3 zwei Basen, $(\mathbb{F}_2)^2$ hat drei Basen und $(\mathbb{F}_7)^3$ besitzt bereits 5.630.688 Basen.

Noch deutlicher wird das Problem im \mathbb{R}^d . Denn nach dem Basisergänzungssatz kann man eine Basis konstruieren, indem man zunächst einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor wählt, und daraufhin immer wieder von den vorher gewählten linear unabhängige Vektoren hinzufügt. So ergibt sich für die Menge aller geordneten Basen des \mathbb{R}^d folgende Darstellung $\prod_{k=1}^{d-1} \{\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^k\}$ Womit

\mathbb{R}^d sogar überabzählbar viele Basen besitzt.

Also stellt sich die Frage, ob alle Basen gleich mächtig sind.

Proposition 3.39. Sei V ein von n Vektoren (insbesondere endlich) erzeugter Vektorraum, dann sind $n+1$ Vektoren linear abhängig.

Beweis. Es sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem in V . So folgt die Behauptung induktiv:

Induktionsverankerung: Für $n=0$ ist $\mathcal{E} = \{\}$ womit $V = \text{Span}(\{\}) = 0$ ist.

Induktionsschritt: Seien $v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \in V$ beliebige aber verschiedene Vektoren. So besitzt jedes v_i folgende Darstellung:

$$v_i = \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} e_{i,j} \text{ mit } \omega_{i,j} \in K$$

Zu Zeigen ist, dass eine nicht-triviale Relation $0 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$ existiert, also dass mindestens ein $\lambda_k \neq 0$ ist.

Betrachte λ_k als Unbekannte in einem wie folgt konstruierten LGS:

$$\text{Es gelte : } 0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} e_{i,j}$$

setze $\omega'_{i,j} := \omega_{j,i}$

Womit sich ein LGS des Ranges $r \leq n$ ergibt, also min. eine freie Variable λ_k enthält. Womit wiederum das LGS eine nichttriviale Lösung besitzt. \square

Nun können wir folgenden gewünschten Satz formulieren:

Satz 3.40 (Dimensionssatz). Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ sowie $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_m\}$ zwei Basen in V , dann sind \mathcal{B} und \mathcal{B}' schon gleich mächtig (bzw. $n=m$).

Beweis. \mathcal{B} ist ein Erzeugendensystem in V mit n Vektoren. Nach Proposition 1 sind $n+1$ Vektoren linear Abhängig, womit $m \leq n$. Analog für \mathcal{B}' .

Somit ist $n=m$. \square

Also können wir nun unseren angestrebten Dimensionsbegriff definieren:

Definition 3.41 (Dimension). Sei \mathcal{B} eine Basis in V , wobei V ein K -Vektorraum ist. So definiere:

$$\dim_K(V) := |\mathcal{B}|$$

Als die Dimension von V .

Beispiele:

1) Sei K ein Körper so ist $\dim_K(K^n) = n$

2) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

3) Nach Übung sind $\log(p_i)$ für beliebige Primzahlen p_i linear unabhängig in \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum. Also ist $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.

Dies ist zwar etwas informell, da es wie bereits erwähnt mehrere Arten der Unendlichkeit gibt. Es wird sich herausstellen, dass jene Dimension sogar überabzählbar ist.

Hier sieht man auch, dass unsere geometrische Vorstellung des Dimensionsbegriffes bei manchen Vektorräumen versagt, da \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum so zu sagen unendlich viele Richtungen besitzt, so stellt z.B. jedes $\log(p_i)$ und jedes \sqrt{a} für ein $a \neq n^2$ mit $a, n \in \mathbb{N}$ eine Richtung dar.

4) Sei $K[X]$ ein Polynomring über K , so ist $\dim_K(K[X]) = |\mathbb{N}|$ also abzählbar. Denn wähle als Basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$.

5) Sei \mathbb{A} der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen auf dem Intervall $[0;1]$ mit $f(0)=0$ und $f(1)=0$. So ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}) = |\mathbb{R}|$ also überabzählbar.

6) Sei \mathbb{E} der Untervektorraum des Vektorraumes der glatten Funktionen über \mathbb{R} aufgespannt von e^{ax} . So ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}) = |\mathbb{R}|$ also auch überabzählbar.

Bemerkung:

Was wir in der linearen Algebra eine Basis nennen heißt im allgemeinen Hamel-Basis. Denn in anderen Gebieten der Mathematik treten andere Basisbegriffe auf. So arbeitet die Analysis oftmals in bzw. mit Räumen überabzählbarer Dimension, wie $C^\infty(\mathbb{R})$, wobei es für solche im allgemeinen sehr schwer ist eine Hamel-Basis anzugeben. Also betrachten Analytiker lediglich approximative Basen, die sogenannte Hilbert-Basis, bei der sich zwar nicht jedes Element des Vektorraumes als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt, wohl aber beliebig gut durch eine Linearkombination der Basisvektoren approximiert werden kann.

Beispiele sind Fourier-Reihen, welche glatte periodische Funktionen durch Überlagerungen von \sin und \cos approximieren. Und der Weierstraß'sche Approximationssatz garantiert, dass glatte Funktionen durch Polynomfunktionen approximiert werden können.

Für die Algebra reicht eine Hilbertbasis jedoch nicht aus!

Die folgende Proposition mag trivial erscheinen –und bei Vektorräumen ist sie es tatsächlich–, aber wenn man sich beispielsweise mit Gruppen beschäftigt, gilt die analoge Aussage nicht.

Proposition 3.42. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ eines endlich-erzeugten Vektorraums gilt immer $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Beweis. Sei \mathcal{B} eine Basis von U , dann ergänze sie zu einer Basis \mathcal{B}' von V , also $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Dann ist $\dim(U) = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| = \dim(V)$ □

Proposition 3.43. Es seien U', U'' Untervektorräume von V (V wieder endlich-erzeugt) mit $U := U' \cap U''$ und $\tilde{U} := U' + U''$. Dann gilt $\underbrace{\dim(\tilde{U})}_{n+m+k} = \underbrace{\dim(U')}_{k+n} + \underbrace{\dim(U'')}_{k+m} - \underbrace{\dim(U)}_k$.

Beweis. Wir wählen eine Basis \mathcal{B} für U . Wir ergänzen einmal zu einer Basis $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ von U' und $\mathcal{B}'' \supset \mathcal{B}$ von U'' . Außerdem setzen wir $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$. Die Beziehungen sind im folgenden *kommutativen Diagramm* dargestellt:

$$\begin{array}{ccc}
 U'' \hookrightarrow \tilde{U} & = U' + U'' & \mathcal{B}'' \subseteq \tilde{\mathcal{B}} \\
 \uparrow & \uparrow & \cup \quad \cup \\
 U' \cap U'' = U \hookrightarrow U' & & \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'
 \end{array}$$

Behauptung: $\tilde{\mathcal{B}}$ ist eine Basis für \tilde{U} . \mathcal{B}' ist offensichtlich ein Erzeugendensystem für \tilde{U} . Betrachte die linear-unabhängige Menge \mathcal{B}' und das Erzeugendensystem $\mathcal{E} := \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \{b'_1, \dots, b'_{m-k}\}$ von \tilde{U} und wende das Basisauswahlverfahren an:

$b'_1 \notin \text{span}(\mathcal{B}')$, also Fügen wir b'_1 hinzu; $b'_2 \notin \text{span}(\mathcal{B}' \cup \{b'_1\})$, wir fügen b'_2 hinzu, und so weiter. Das heißt, das Basisauswahlverfahren liefert uns hier tatsächlich $\tilde{\mathcal{B}}$. □

Beispiel 3.44. 1. Seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ Körper. Sei $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ eine Basis von \mathbb{L} als \mathbb{K} -Vektorraum. Ist V ein \mathbb{L} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_{\mathbb{L}} = \{b_1, \dots, b_n\}$ (als \mathbb{L} -Vektorraum!), dann ist

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}} := \Lambda \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{K}} = \{\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_l b_1, \lambda_1 b_2, \dots, \lambda_l b_2, \dots, \lambda_1 b_n, \dots, \lambda_l b_n\}$$

eine Basis von V als \mathbb{K} -Vektorraum. Insbesondere gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}}_l \cdot \underbrace{\dim_{\mathbb{L}} V}_n$$

Konkret heißt das, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ betrachten: $\Lambda = \{1, i\}, l = 2$. Also: $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$

2. Wir betrachten $V = \mathbb{C}^n$ als \mathbb{C} - und als \mathbb{R} -Vektorraum:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{e_1, \dots, e_n\}; e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\boxed{k}}, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n\}; ie_k = (0, \dots, 0, \underbrace{i}_{\boxed{k}}, 0, \dots, 0)$$

3. Wir betrachten $V = \mathbb{C}[X]$ der komplexen Polynome in X , wieder zunächst als Vektorraum über \mathbb{C} und dann über \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\} \text{ Stammpolynome}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1, i, X, iX, \dots, X^n, iX^n, \dots\}$$

Beispiel 3.45. es sei \mathbb{L} ein *endlicher* Körper (etwa $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \dots, \mathbb{F}_p$). Weil \mathbb{L} endlich ist, muss $\text{char}(\mathbb{L}) = p$ (p eine Primzahl) sein. Wie in Definition

3.5 Prinzip der linearen Fortsetzung

Das Prinzip der linearen Fortsetzung besagt, dass eine lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis vollständig bestimmt ist. Dieser „Trick“ ist hilfreich, da man statt unendlicher Systeme endliche Basen betrachten kann. Außerdem können wir die Werte auf einer Basis vorgeben, und dann wissen, dass es eine solche lineare Abbildung gibt.

Proposition 3.46. Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} .

- (i) Für ein Erzeugendensystem \mathcal{E} von V gilt: Sind $f, g : V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen und gilt $f(e) = g(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}$, dann gilt $f = g$ (d.h. $\forall v \in V : f(v) = g(v)$).
- (ii) Für eine linear-unabhängige Menge \mathcal{B} in V gilt: Ist $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow W, b \mapsto \varphi(b)$ eine beliebige Funktion, so gibt es eine *lineare Fortsetzung* $f : V \rightarrow W$, das heißt eine lineare Abbildung f mit der Eigenschaft $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$ (d.h. $f(b) = \varphi(b), b \in \mathcal{B}$).

Im kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \cup & \nearrow \varphi & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

- (iii) Aus (i) und (ii) folgt dann: Für eine Basis \mathcal{B} von V gilt: Jede Funktion $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow W$ besitzt genau eine lineare Fortsetzung $f : V \rightarrow W$ (d.h. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$).

Korollar 3.47. Es gibt eine Bijektion zwischen den Funktionen von \mathcal{B} nach W und den linearen Abbildungen von V nach W .

$$\begin{array}{ccc} \text{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\cong} & \text{lin}_{\mathbb{K}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ & \varphi \mapsto & f \\ & \varphi := f|_{\mathcal{B}} \longleftarrow & f \end{array}$$

Beweis. (i) Sei v dargestellt durch \mathcal{E} , etwa

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Dann rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \underbrace{f(e_1)}_{=} + \dots + \lambda_n \underbrace{f(e_n)}_{=} \\ &= \lambda_1 \underbrace{g(e_1)}_{=} + \dots + \lambda_n \underbrace{g(e_n)}_{=} \\ &= g(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= g(v) \end{aligned}$$

(ii) Auf $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ seien Werte $w_i = \varphi(b_i)$ vorgegeben. wir ergänzen \mathcal{B} zu einer Basis $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ von v :

$$\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_n, \underbrace{b'_1, \dots, b'_m}_{\text{erg\u00e4nzt}}\}$$

Wir schreiben $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \lambda'_1 b'_1 + \dots + \lambda'_m b'_m$. Wir w\u00e4hlen w_{n+1}, \dots, w_{n+m} beliebig in W (z.B. = 0). Dann definieren wir:

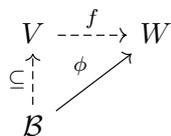
$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n + \lambda'_1 w_{n+1} + \dots + \lambda'_m w_{n+m}$$

Wir stellen fest:

1. Damit ist $f : V \rightarrow W$ f\u00fcr jedes v definiert, denn f\u00fcr jedes v gibt es eine Darstellung.
2. f ist wohldefiniert, weil die Darstellung von v eindeutig ist.
3. f ist linear.
4. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$ auf \mathcal{B}

□

V Sei ein \mathbb{K} -Vektorraum. $\mathcal{B} \subseteq V$



f ist linear, ϕ entspricht dann einer beliebigen Funktion.

$$\text{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} \longrightarrow \text{Lin}_{\mathcal{B}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(V, W); \phi \longleftarrow f$$

1. \mathcal{E} ist Erzeugendensystem
 $f, g : V \longrightarrow W$
 $f|_{\mathcal{E}} = g|_{\mathcal{E}} \implies f = g$
2. \mathcal{B} ist linear-unabh\u00e4ngig $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists f : V \longrightarrow W$ linear $f|_{\mathcal{B}} = \phi$
3. \mathcal{B} ist eine Basis $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists! f : V \longrightarrow W$ linear $f|_{\mathcal{B}} = \phi$

Beispiel 3.48. $V = \mathbb{C}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$

3.6 Koordinaten

V ist endlich erzeugter Vektorraum über \mathbb{K} .

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ist geordnete Basis.

Sei $V \ni v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ und $v = \lambda'_1 b_1 + \dots + \lambda'_n b_n$, dann ist $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$ (eindeutige Darstellung).

Definition 3.49. Falls \mathcal{B} eine fest gewählte Basis ist, dann gibt es *Koordinaten* bzgl. \mathcal{B} . Definiert durch

$$K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

falls $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

$K_{\mathcal{B}}^i(v) = \lambda_i$ ist die i -te Koordinate.

$K_{\mathcal{B}}(v) = (K_{\mathcal{B}}^1(v), \dots, K_{\mathcal{B}}^n(v))$

Satz 3.50. $K_{\mathcal{B}}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

1. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv:

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ Rückrichtung ist klar nach Konstruktion (siehe Definition).

2. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist linear:

$$K_{\mathcal{B}}(0) = (0, \dots, 0) = 0$$

Seien $v, v' \in V$.

Dann gilt $K_{\mathcal{B}}(v) + K_{\mathcal{B}}(v') = K_{\mathcal{B}}(v + v')$, denn $(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) + (\lambda'_1 b_1 + \dots + \lambda'_n b_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n) b_n$

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$. $K_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha K_{\mathcal{B}}(v)$, denn $\lambda_1 \alpha b_1 + \dots + \lambda_n \alpha b_n = \alpha(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$

□

Beispiel 3.51. 1. Wenn $V = \mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Standardbasis, dann ist $K_{\mathcal{B}}(v) = v$, also $K_{\mathcal{B}} = id$. Denn $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$.

2. Wenn $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = ((1, 0), (1, 1))$, dann ist $v = (1, 1) = 1b_1 + 1b_2 = 1(1, 0) + 1(1, 1)$

3. Wenn $V = P_n(\mathbb{K}) \hat{=} \text{Vektorraum der Polynome vom Grad } \leq n$ und $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$. Dann ist $p(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $K_{\mathcal{B}} = (a_0, \dots, a_n)$

Es stellt sich nun die Frage, was tun, wenn V nicht endlich erzeugt ist?

- wähle auch hier Basis \mathcal{B}
- was wäre auf der rechten Seite $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ oder $\mathbb{K}^{|\mathcal{B}|}$ $W^{\mathcal{B}}$ ist die Menge aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow W$
- $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ ist in der Tat zu groß für unsere Zwecke

Besser: Teilraum $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist frei von \mathcal{B} erzeugter Vektorraum. $\mathbb{K}^{\mathcal{B}} \hat{=} \text{Menge aller Funktionen von } \mathcal{B} \text{ nach } \mathbb{K}$ ist das kartesische Produkt aller Faktoren \mathbb{K} , Indexmenge \mathcal{B}

$\Pi \mathbb{K}_{\mathcal{B}} \hat{=} \text{alle mit } \mathcal{B} \text{ indizierten Familien } (\lambda_b \mid b \in \mathcal{B}) \longleftrightarrow \phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}; b \longmapsto \lambda_b$. Im Falle \mathcal{B} abzählbar, so wäre dies dann die Folge $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

Unterraum $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $\phi(b) = 0$ für fast alle $b \in \mathcal{B}$,

d.h. die Menge $\text{supp}(\phi) \hat{=} \text{Menge der Träger von } \phi = \{b \in \mathcal{B} \mid \phi(b) \neq 0\}$ endlich.

$\text{supp}(\alpha\phi) = \text{supp}(\phi), \alpha \neq 0$

$\text{supp}(\phi_1 + \phi_2) \subseteq \text{supp}(\phi_1) \cup \text{supp}(\phi_2)$

$\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist eine \mathbb{K} -VR.

Basis? Standardbasis?

Definition 3.52. Für jedes $b \in \mathcal{B}$ ist die *charakteristische Funktion* definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_b : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ b' &\longmapsto \delta_{bb'} = \begin{cases} 1, & b' = b, \\ 0, & b' \neq b. \end{cases} \end{aligned}$$

$\phi \in \mathbb{K}(\mathcal{B})$

$\text{supp}(\phi) = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\phi = \phi(b_1)\mathcal{X}_{b_1} + \dots + \phi(b_n)\mathcal{X}_{b_n}$ $X = \{\mathcal{X}_b \mid b \in \mathcal{B}\}$ ist ein Erzeugendensystem und linear-unabhängig

$\alpha_1\mathcal{X}_{b_1} + \dots + \alpha_n\mathcal{X}_{b_n} = 0$

Einsetzen $b = b_1, b_2$, dann $\alpha_1\mathcal{X}_{b_1}(b_1) = 1$ $\mathcal{B} \longleftarrow X$

$b \longmapsto \mathcal{X}_b$

Dann $\mathcal{B} \hat{=} X \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{B})$ und $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(\mathcal{B}) = |\mathcal{B}|$

Beispiel 3.53. $\mathcal{B} = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \cong \mathbb{K}^n$; $e_i \longmapsto \mathcal{X}_i$

Koordinaten: $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K(\mathcal{B})$, $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ eine Darstellung durch gewisse $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$. (das ist nicht abgezählt)

$v \longmapsto \mathcal{X}_v = \lambda_1\mathcal{X}_{b_1} + \dots + \lambda_n\mathcal{X}_{b_n}$, $\text{supp}(\mathcal{X}_v) \subseteq \{b_1, \dots, b_n\}$

$\phi \longmapsto v' = \phi(b'_1)b'_1 + \dots + \phi(b'_m)b'_m$, $\text{supp}(\phi) = \{b'_1, \dots, b'_m\}$

Satz 3.54. $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist ein Isomorphismus.

A ist Menge, $\mathbb{K}(A)$ frei von A erzeugter \mathbb{K} -VR, $\phi : A \longrightarrow \mathbb{K}$, $\text{supp}(\phi)$ endlich, $\Psi \circ l_A = \Psi|_A = l_B \circ \psi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{l_A} & \mathbb{K}(A) \\ \downarrow \psi & \searrow \phi & \downarrow l_B \circ \psi \\ B & \xleftarrow{l_B} & \mathbb{K}(B) = W \end{array}$$

3.7 Isomorphieinvarianten

Definition 3.55. Zwei Vektorräume V und W (über \mathbb{K}) heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ gibt. Wir schreiben $V \cong W$

Satz 3.56. *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. • $f = id_V$ ist ein Isomorphismus von V nach V , sodass für alle Vektorräume V gilt $V \cong V$

• Ist $f : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : W \rightarrow V$ ein Isomorphismus. Also gilt für Zwei Vektorräume V, W : $V \cong W \Leftrightarrow W \cong V$

• Sind $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow X$ zwei Isomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Isomorphismus. Für V, W, X gilt also $V \cong W, W \cong X \Rightarrow V \cong X$

□

Was ist eine Isomorphieinvariante? Das ist eine "Größe" γ (z.B. eine Zahl, ein Zahlenpaar, eine Angabe Ja/Nein), welche man einem Vektorraum zuordnen kann, so dass gilt:

$$V \cong W \Rightarrow \gamma(V) = \gamma(W)$$

Gilt auch die Umkehrung, so nennt man γ vollständig.

Beispiel 3.57. • Betrachten wir alle Rechtecke in der Ebene und als Äquivalenzrelation die Kongruenz. Da $R \equiv R' \Leftrightarrow \text{Seitenlängen}(a, b) = (a', b')$ ist (a, b) eine vollständige Kongruenzinvariante.

- Wählen wir statt der Seitenlängen (a, b) den Flächeninhalt vol , oder die Diagonallänge γ_2 wählt, so ist dies eine Kongruenzinvariante, aber keine vollständige.
- Betrachten wir als Äquivalenzrelation die Ähnlichkeit, so ist (a, b) keine Invariante. Wohl aber $\gamma'_0(\mathbb{R}) = \frac{a}{b}$

Wir werden für $\gamma = \dim_{\mathbb{K}}$ wählen und sogar mehr zeigen.

Proposition 3.58. Sei $f : V \rightarrow W$ linear

1. Ist $\xi \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und f epimorph, so ist $\xi' = f(\xi)$ ein Erzeugendensystem von W .
2. Ist \mathcal{B} linear unabhängig und f monomorph, so ist $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ linear unabhängig.

Beweis. 1. Es sei $w \in W$, also etwa $w = f(v)$ für ein $v \in V$. Wir können v schreiben als

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

für geeignete $e_1, \dots, e_n \in \xi, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ denn ξ ist EZS für V . Dann gilt $w = f(v) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ also ist $w \in \text{Span}(\xi')$

2. Angenommen, wir hätten eine nicht-triviale Relation zwischen Elementen in \mathcal{B}' , also etwa

$$\lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n) = 0$$

mit nicht alle

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

null. Dann hätten wir auch

$$f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = 0$$

und weil f monomorph ist, auch

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$$

\mathcal{B} war aber als linear unabhängig vorausgesetzt

□

Korollar 3.59. Es sei $f : V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus. Ist $\mathcal{B} \subseteq V$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Erzeugendensystem} \\ \text{linear unabhängig} \\ \text{eine Basis} \end{array} \right.$, so ist

auch $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B}) \subseteq V'$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Erzeugendensystem} \\ \text{linear unabhängig} \\ \text{eine Basis} \end{array} \right.$

Beweis. Beweis folgt aus der Proposition.

□

Satz 3.60. $V \cong V' \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V')$

Beweis. "⇒": Ist $f : V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus und \mathcal{B} irgendeine Basis von V , so ist nach dem Korollar $f(\mathcal{B})$ eine Basis von V' . Da f bijektiv ist, sind \mathcal{B} und $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ gleich mächtig, also $\dim_{\mathbb{K}}(V) = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| = \dim_{\mathbb{K}}(V')$.

" \Leftarrow ": Aus $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V')$ folgt, dass je zwei Basen \mathcal{B} von V bzw. \mathcal{B}' von V' gleich mächtig sind. Wir wählen eine Bijektion $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ und definieren $\Phi = \mathbb{K}(\varphi) : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B}')$ durch $\Phi(x) = x \circ \varphi : \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{B} \xrightarrow{x} \mathbb{K}$ einen Isomorphismus Φ . Insgesamt haben wir dann

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathbb{K}_{\mathcal{B}} \cong} & \mathbb{K}(\mathcal{B}) \\ \downarrow \cong f & & \downarrow \cong \Phi = \mathbb{K}(\varphi) \\ V' & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{K}(\mathcal{B}') \end{array}$$

Nun definieren wir $f := K_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \mathbb{K}(\varphi) \circ K_{\mathcal{B}}$. Dies ist ein Isomorphismus;

er macht das obige Diagramm *kommutativ*.

□

Bemerkung 3.61. Dieses f ist nicht *kanonisch*, was so viel heißt wie: es ist nicht der einzige Isomorphismus, er hängt von vielen Wahlen ab:

- Wahl von \mathcal{B}
- Wahl von \mathcal{B}'
- Wahl von φ

Rang: $rg(A) = rg(T_A) = rg(L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A))$
 $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$
 $f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A) : V \rightarrow W \quad \dim(V) = n \quad \dim(W) = m$

Satz 3.62. $rg(A) = rg(T_A) = rg(L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A))$

Beweis. Für die erste Gleichheit wenden wir die Dimensionsformel an:
 $\dim(W(A)) = \dim(\text{Im}(T_A)) = n - \dim(\mathcal{L}(A|0)) = r = rg(A)$
Für die zweite Gleichheit beachte man

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}} & W \\ K_{\mathfrak{A}} \downarrow \cong & & \cong \downarrow K_{\mathfrak{B}} \\ & \xrightarrow{T_A} & \end{array}$$

Wobei $f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = K_{\mathfrak{B}}^{-1} \cdot T_A \cdot K_{\mathfrak{A}}$

Aber

- 1) $K_{\mathfrak{B}}(\text{Im}(f)) = \text{Im}(T_A)$
- 2) $K_{\mathfrak{B}} : \text{Im}(f) \xrightarrow{\cong} \text{Im}(T_A)$

Beweis fertig mit Lemma 1(1). □

Allgemein:

Lemma 3.63. *Es sei* $\text{Ker}(f) \subseteq V \xrightarrow{f} W \supseteq \text{Im}(f)$
 $\varphi \downarrow \cong \quad \downarrow \varphi \quad \downarrow \psi \quad \downarrow \cong$
 $\text{Ker}(f') \subseteq V' \xrightarrow{f'} W' \supseteq \text{Im}(f')$

ein kommutatives Diagramm,

dh. $\psi \circ f = f' \circ \varphi$ sind φ und ψ Isomorphismen, dann gilt:

1. $\text{Im}(f)$ wird von ψ isomorph auf das $\text{Im}(f')$ abgebildet.
2. $\text{Ker}(f)$ wird von φ isomorph auf den $\text{Ker}(f')$ abgebildet.

Beweis. zu 2.

$$v \in V, f(v) = 0 \Leftrightarrow \psi(f(v)) = 0 = f'(\varphi(v))$$

$$v \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \varphi(v) \in \text{Ker}(f')$$

Umgekehrt $v' \in \text{Ker}(f')$ also $f'(v') = 0$.

Weil φ surjektiv ist, ist $v' = \varphi(v)$ für ein $v \in V$.

$$\text{Dh. } 0 = f'(\varphi(v)) = \psi(f(v)).$$

Weil ψ monomorph ist, folgt $f(v) = 0$, also $v \in \text{Ker}(f)$. □

Lemma 3.64. $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\cong} W$
 $\varphi \uparrow \cong$
 V

1. $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\psi \circ f)$ (aber i.A. $\text{Im}(f) \neq \text{Im}(\psi \circ f)$)
2. $\text{Im}(f \circ \varphi) = \text{Im}(f)$ (aber i.A. $\text{Ker}(f) \neq \text{Ker}(f \circ \varphi)$)

Bemerkung 3.65. zu 4.2

a) V fest, \mathbb{K} fest

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \varphi) \\ V & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \downarrow \varphi \circ f & & \downarrow \\ & & Y \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, Y) \end{array}$$

Wieder erhält man ein Funktor.

kovariant: $W = Y : (id_W)_* = id_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}$ (induzierte Abbildung)
 $id_* = id$ (aber nicht die gleiche Identität!)

b) W fest, \mathbb{K} fest

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \psi & \\ \downarrow \psi \circ f & & \downarrow \\ X & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, W) \ni f \circ \psi = \psi^*(f) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} W & \downarrow \psi & \uparrow \psi^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\psi, W) \\ \swarrow f & & \downarrow \\ V & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \ni f \end{array}$$

Ein Funktor $VR_{/\mathbb{K}} \rightarrow VR_{/\mathbb{K}}$

Kontravariant

$$1. X = V \quad (id_V)^* = id_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}$$

$$2. (\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$$

=====

4 Matrizen

4.1 Rechnen mit Matrizen

Mit \mathbb{K} bezeichnen wir wie immer einen Körper, mit $M = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ die Menge der $m \times n$ Matrizen über \mathbb{K} . Für eine Matrix schreiben wir $A = (a_{ij})$, mit dem *Zeilenindex* $i = 1, \dots, m$ und dem *Spaltenindex* $j = 1, \dots, n$.

Addition

$$\begin{aligned} + : M \times M &\longrightarrow M \\ (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) &\longmapsto C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

Die Matrix mit allen Einträgen gleich Null heißt *Nullmatrix* $0_{m,n} = 0$.

Es gilt:

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 3) $A + 0 = A = 0 + A$
- 4) zu jedem $A \in M$ gibt es ein Negatives $-A = (-a_{ij})$ mit $A + (-A) = 0$

Skalierung

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A = (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

Es gilt:

- 5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- 6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 7) $1 \cdot A = A$; $(-1) \cdot A = -A$
- 8) $0 \cdot A = 0$; $\lambda \cdot 0 = 0$

Einheitsmatrizen und Elementarmatrizen

Matrizen der Form $\tilde{E}^{kl} = (\tilde{e}_{ij}^{kl})$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n$) mit

$$\tilde{e}_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{falls } (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

heißen *Einheitsmatrizen*.

$$\tilde{E}^{kl} = \begin{matrix} & & & \boxed{l} \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ \boxed{k} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \dots & & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} & & \end{matrix}$$

Matrizen der Form $E^{kl} = \mathbb{1} + \tilde{E}^{kl}$ ($k \neq l$) heißen *Elementarmatrizen*.

Satz 4.1. (i) $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(ii) $\mathcal{B} = \{\tilde{E}^{kl} | k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n\}$ ist eine Basis.

(iii) $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})) = m \cdot n$

Beweis. (i) folgt aus 1) bis 8).

(ii)

$$A = (a_{ij}) = \begin{matrix} a_{11}\tilde{E}^{11} & +a_{12}\tilde{E}^{12} & +\dots & +a_{1n}\tilde{E}^{1n} \\ +a_{21}\tilde{E}^{21} & +\dots & & \\ \vdots & & & \\ +a_{m1}\tilde{E}^{m1} & +\dots & & +a_{mn}\tilde{E}^{mn} \end{matrix} = \sum_{i,j} a_{ij}\tilde{E}^{ij}$$

Also ist \mathcal{B} ein Erzeugendensystem. Für die lineare Unabhängigkeit von \mathcal{B} schreibe man eine mutmaßliche Relation

$$0 = \begin{matrix} \lambda_{11}\tilde{E}^{11} & +\dots & +\lambda_{1n}\tilde{E}^{1n} \\ \vdots & & \\ +\lambda_{m1}\tilde{E}^{m1} & +\dots & +\lambda_{mn}\tilde{E}^{mn} \end{matrix}$$

mit $m \cdot n$ Termen. Also erhalten wir $m \cdot n$ Gleichungen für jede Stelle (i, j) :

$$0 = \lambda_{ij} \cdot \tilde{e}_{ij}^{ij} = \lambda_{ij}$$

Also sind alle $\lambda_{ij} = 0$.

(iii) folgt aus (ii).

□

Multiplikation von Matrizen

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_{m,k}(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_{k,n}(\mathbb{K}) & & \xrightarrow{\quad} \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ A, B & & \longmapsto A \cdot B = AB =: C \\ (a_{ij}), (b_{jl}) & & \longmapsto (c_{il}) \end{array}$$

mit $c_{il} := \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sl}$; $i = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, n$.

Es gilt:

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- 2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$
 $(A + B) \cdot C = AC + BC$
- 3) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 4) $\underset{m,k}{0} \cdot \underset{k,n}{A} = \underset{m,n}{0}$; $\underset{m,n}{A} \cdot \underset{k,n}{0} = \underset{m,n}{0}$

Lemma 4.2. (i) Ist die i -te Zeile $Z_i(A) = 0$, so auch die i -te Zeile $Z_i(AB)$, für alle B .

(ii) Ist die j -te Spalte $S_j(B) = 0$, so auch $S_j(AB)$, für alle A .

Achtung!!! Das Matrizenprodukt ist im Allgemeinen **nicht** kommutativ:

$$AB \neq BA$$

Beispiel 4.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der } y\text{-Achse}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der } x\text{-Achse}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der Hauptdiagonalen}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der Nebendiagonalen}$$

Spezielle Produkte

a) $m = 1, n = 1, k$ beliebig: Skalarprodukt $\langle A, B \rangle$

$$\underbrace{(a_1, \dots, a_k)}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_B = \underbrace{a_1 b_1 + \dots + a_k b_k}_C$$

b) $k = 1; m, n$ beliebig:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix}}_C$$

mit $\text{rg}(C) = 1$

c) $n = 1; m, k$ beliebig, $A \in \text{Mat}_{m,k}(\mathbb{K})$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und k Unbekannten.

Bemerkung 4.4. Eine $(n \times n)$ -Matrix heißt *quadratisch*.

Einsmatrix

Die quadratische $(n \times n)$ -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Einträgen 1 entlang der Diagonale und 0 sonst, heißt *Einsmatrix* $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. Es gilt (für $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$):

1)

$$\begin{matrix} \mathbb{1}_m & \cdot & A & = & A \\ m \times m & & m \times n & & m \times n \end{matrix}$$

2)

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot & \mathbb{1}_n \\ m \times n & & n \times n \end{array} = \begin{array}{c} A \\ m \times n \end{array}$$

Also ist $\mathbb{1}$ ein beidseitiges neutrales Element.

Achtung! Nicht jede $(n \times n)$ -Matrix besitzt ein Inverses!

Definition 4.5. Sei $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- 1) Eine Matrix $B \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ heißt *Rechtsinverses* zu A , falls gilt: $A \cdot B = \mathbb{1}_m$.
- 2) Eine Matrix $C \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ heißt *Linksinverses* zu A , falls gilt: $C \cdot A = \mathbb{1}_n$.
- 3) Eine quadratische Matrix $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ heißt *invertierbar*, falls es ein $\tilde{A} \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gibt mit $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \mathbb{1}_n$.

Bemerkung 4.6. Existiert im Fall 3) ein Inverses, so ist es eindeutig bestimmt. (Aber Rechts- und Linksinverse sind *nicht* eindeutig bestimmt.)

Beweis. Seien $\tilde{A}, \tilde{\tilde{A}}$ zwei Inverse zu A , also $A\tilde{A} = \mathbb{1}$, $A\tilde{\tilde{A}} = \mathbb{1}$. Nach Distributivität gilt:

$$A(\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}}) = A\tilde{A} - A\tilde{\tilde{A}} = 0$$

Wenn wir diese Gleichung nun von links mit $\tilde{\tilde{A}}$ multiplizieren, erhalten wir:

$$0 = \tilde{\tilde{A}} \cdot 0 = \tilde{\tilde{A}}A(\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}}) = \mathbb{1} \cdot (\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}})$$

. Damit folgt $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}$. □

Notation Ist A invertierbar, so nennen wir das (eindeutig bestimmte) Inverse A^{-1} .

Lemma 4.7. *i) Ist A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.*

ii) Sind A und B invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Man beachte die Reihenfolge!)

iii) Ist A invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, so auch λA und $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Beweis. klar. □

Beispiel 4.8. $(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Satz 4.9. Eine $(n \times n)$ -Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihr Rang $\text{rg}(A) = n$, also maximal.

Definition 4.10 (Transponieren).

$$\begin{aligned} \top : \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (a_{ij}) = a &\longmapsto A^\top := (a_{ji}) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt:

- 1) $(A^\top)^\top = A$
- 2) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

- 3) $(\lambda A)^\top = \lambda \cdot A^\top$
- 4) $0^\top = 0$
- 5) $\mathbb{1}_n^\top = \mathbb{1}_n$
- 6) $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- 7) Ist A invertierbar, so auch A^\top mit $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Beispiel 4.11.

$$\begin{array}{ll}
 x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n & \text{Zeilenvektor} \\
 x^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \text{Spaltenvektor} \\
 x \cdot y^\top = \langle x, y \rangle & x, y \text{ Zeilenvektoren} \\
 x^\top \cdot y = \langle x, y \rangle & x, y \text{ Spaltenvektoren}
 \end{array}$$

4.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Wir haben bereits gesehen, dass die Multiplikation einer $(m \times n)$ -Matrix C mit einem $(n \times 1)$ -Spaltenvektor $x \in K^n$ einen $(m \times 1)$ -Spaltenvektor ergibt und dass dies eine lineare Abbildung ist:

$$\begin{aligned}
 T_C : K^n &\rightarrow K^m \\
 x &\mapsto Cx
 \end{aligned}$$

Rechenregeln:

1. $T_C(0) = 0$
2. $T_C(\lambda x) = \lambda T_C(x)$
3. $T_C(x + x') = T_C(x) + T_C(x')$

Sei V ein K -Vektorraum mit geordneter Basis $A = (a_1, \dots, a_n)$, $\dim V = n$, W ein K -Vektorraum mit geordneter Basis $B = (b_1, \dots, b_m)$, $\dim W = m$ und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist f durch $f(A)$ vollkommen bestimmt, also durch $f(a_1), \dots, f(a_n) \in W$.

Jedes $f(a_j)$ ist bestimmt durch seine Koeffizienten bzgl. der Basis B :

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} b_i$$

Also ist f durch die λ_{ij} vollkommen bestimmt. Diese λ_{ij} fasse man zu einer Matrix $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ zusammen und notiere:

1. $K_B(f(a_j)) = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj}) = S_j(\Lambda) = \Lambda e_j$ (j-te Spalte)
2. $a_j = K_A^{-1}(e_j)$

Damit haben wir $K_B \circ f = T_\Lambda \circ K_A$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ K_A \downarrow & & \downarrow K_B \\ K^n & \xrightarrow{T_\Lambda} & K^m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_j & \mapsto & f(a_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_j & \mapsto & S_j(\Lambda) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \implies f &= K_B^{-1} \circ T_\Lambda \circ K_A \\ T_\Lambda &= K_B \circ f \circ K_A^{-1} \end{aligned}$$

Bei festgewählten Basen A und B bestimmt f eine Matrix Λ und damit T_Λ und umgekehrt bestimmt Λ das T_Λ und damit f .

Definition 4.12. Wir definieren zwei Funktionen:

$$\begin{aligned} M_{BA} : \text{Hom}_K(V, W) &\rightarrow \text{Mat}_{m,n}(K) \\ f &\mapsto C = (c_{ij}) \end{aligned}$$

mit $c_{ij} = K_B(f(a_j))$ und

$$\begin{aligned} L_{BA} : \text{Mat}_{m,n}(K) &\rightarrow \text{Hom}_K(V, W) \\ C &\mapsto f = K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A \end{aligned}$$

Beispiel 4.13.

1. $f = 0$: $M_{BA}(0) = 0$
 $C = 0$: $L_{BA}(0) = 0$
2. $V = W$, $A = B$:
 $f = \text{id}$: $M_{AA}(\text{id}) = \mathbf{1}$
 $C = \mathbf{1}$: $L_{AA}(\mathbf{1}) = \text{id}$
3. $V = W = \mathbb{R}^2$, $A = (e_1, e_2)$, $B = (e_1, e_2 + e_1)$, $f = \text{id}$:
 $M_{BA}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $V = W = \mathbb{R}^2$, $A = (e_1, e_2)$, $B = (e_1, e_2 + e_1)$, $C = \mathbf{1}$:
 $L_{BA}(\mathbf{1}) = ((x, y) \mapsto (x, -x + y))$ (Scherung)
5. $V = K^n$, $W = K^m$, $A = (e_1, \dots, e_n)$, $B = (e_1, \dots, e_m)$:
 $M_{BA}(T_C) = C$, $L_{BA}(C) = T_C$, denn $K_A = \text{id}$, $K_B = \text{id}$

Satz 4.14. Sei A bzw. B eine Basis für V bzw. W . M_{BA} und L_{BA} sind zueinander invers und linear, d.h. sie sind Isomorphismen von Vektorräumen.

$$\text{Hom}(V, W) \begin{array}{c} \xrightarrow{M_{BA}} \\ \xleftarrow{L_{BA}} \end{array} \text{Mat}_{m,n}(K)$$

Seien $V = K^n$, $W = K^m$ und A und B die Standardbasen von V , W . Nun betrachte man die Funktionen

$$\begin{aligned} L_{BA} = T : \text{Mat}_{n,m}(K) &\rightarrow \text{Hom}(K^n, K^m) \\ C &\mapsto K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A = T_C \end{aligned}$$

Lemma 4.15. T ist linear und multiplikativ, d.h. $T_0 = 0$, $T_{\lambda C} = \lambda T_C$, $T_{A+B} = T_A + T_B$, sowie für $n = m$ gilt $T_{\mathbb{1}} = \text{id}$ und $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$, als auch $T_{AB} = T_A T_B$ für passende A und B .

Die Beweise reduzieren sich auf Rechenregeln für Matrizen.

Es sei $\varphi : W \rightarrow Y$ eine feste lineare Abbildung. Dann haben wir die Postkomposition

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & & \searrow & \\ & & & & \varphi \circ f \end{array}$$

und können dies als Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_* &= \text{Hom}_K(V, \varphi) : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V, Y) \\ & f \mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

betrachten.

Entsprechend sei $\psi : X \rightarrow V$ eine feste lineare Abbildung. Dann haben wir die Präkomposition

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\psi} & V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & & \searrow & \\ & & & & f \circ \psi \end{array}$$

und können dies als Funktion

$$\begin{aligned} \psi^* &= \text{Hom}_K(\psi, W) : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(X, W) \\ & f \mapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

betrachten.

Lemma 4.16. $\varphi_* : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V, Y)$ ist linear:

1. $\varphi_*(0) = 0$
2. $\varphi_*(\lambda f) = \lambda \varphi_*(f)$
3. $\varphi_*(f + g) = \varphi_*(f) + \varphi_*(g)$
- 1'. $\varphi \circ 0 = 0$
- 2'. $\varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f)$
- 3'. $\varphi \circ (f + g) = (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g)$

Lemma 4.17. $\psi^* : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(X, W)$ ist linear:

1. $\psi^*(0) = 0$
2. $\psi^*(\lambda f) = \lambda \psi^*(f)$
3. $\psi^*(f + g) = \psi^*(f) + \psi^*(g)$
- 1'. $0 \circ \psi = 0$
- 2'. $(\lambda f) \circ \psi = \lambda(f \circ \psi)$
- 3'. $(f + g) \circ \psi = (f \circ \psi) + (g \circ \psi)$

$$\varphi_*(0) = \varphi \circ 0 = 0(\varphi_*(\lambda f))(x) = (\varphi \circ (\lambda f))(x) = \varphi(\lambda f(x)) = \lambda \varphi(f(x)) = \lambda((\varphi \circ f)(x)) = \lambda(\varphi_*(f)(x))(\varphi_*(f) \cdot$$

$$L(M(f)) = K_B^{-1} \circ T_{M(f)} \circ K_A = K_B^{-1} \circ K_B \circ f \circ K_A^{-1} \circ K_A = fM(L(C))(x) = M(K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A)(x) = K_B$$

Also $L \circ M = \text{id}$ und $M \circ L = \text{id}$.

Es genügt, die Linearität von L zu zeigen. Dies folgt mithilfe der gerade bewiesenen Lemmata:

$$\begin{aligned} L(\lambda C) &= K_B^{-1} \circ T_{\lambda C} \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ (\lambda T_C) \circ K_A \\ &= \lambda(K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A) \\ &= \lambda L(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(A + B) &= K_B^{-1} \circ T_{A+B} \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ (T_A + T_B) \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ T_A \circ K_A + K_B^{-1} \circ T_B \circ K_A \\ &= L(A) + L(B) \end{aligned} \quad \square$$

Basis für $\text{Hom}_K(V, W)$

Da L_{BA} ein Isomorphismus ist, können wir die Basis \tilde{E}^{kl} der StandardEinheitsmatrizen nach $\text{Hom}(V, W)$ schicken und erhalten

$$f^{kl} : V \rightarrow W, a_j \mapsto \begin{cases} b_k & , \text{ falls } j = l \\ 0 & , \text{ falls } j \neq l \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt nun

$$\begin{aligned} L_{BA}(\tilde{E}^{kl}) &= f^{kl} \\ M_{BA}(f^{kl}) &= \tilde{E}^{kl} \end{aligned}$$

In Lemma

Satz 4.18.

$$\begin{aligned} M_{AA}(\text{id}) &= \mathbb{1} \\ L_{AA}(\mathbb{1}) &= \text{id} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CA}(f \circ g) &= M_{CB}(f) \cdot M_{BA}(g) \\ L_{CA}(A \cdot B) &= L_{CB}(A) \circ L_{BA}(B) \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Ausgaben wurden bereits bewiesen, bei den anderen genügt es, diese für L zu beweisen.

$$\begin{aligned} L_{CA}(AB) &= K_C^{-1} \circ T_{AB} \circ K_A \\ &= K_C^{-1} \circ T_A \circ T_B \circ K_A \\ &= K_C^{-1} \circ T_A \circ K_B \circ K_B^{-1} \circ T_B \circ K_A \\ &= L_{CB}(A) \circ L_{BA}(B) \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 4.19. $f : V \rightarrow W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $M_{BA}(f)$ invertierbar ist; in diesem Fall ist $M_{BA}(f^{-1}) = M_{BA}(f)^{-1}$.

$C \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $L_{BA}(C)$ ein Isomorphismus ist; in diesem Fall ist $L_{AB}(C^{-1}) = L_{BA}(C)^{-1}$, und speziell ist $L_{AB}(\mathbb{1}) = L_{BA}(\mathbb{1})^{-1}$.

4.3 Basiswechsel

Angenommen, wir haben bislang einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ bzgl. der Basen $A \subseteq V$ und $B \subseteq W$ eine Matrix zugeordnet, nämlich $C = M_{BA}(f)$. Wie ändert sich C , wenn wir andere Basen A' und B' nehmen?

Wir benutzen Satz

Normalformen

Wir werden noch sehen, dass wir die zu einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ bzgl. zweier Basen $A \subseteq V$ und $B \subseteq W$ gehörende Matrix $C = M_{BA}(f)$ durch geschickte Wahl von A und B auf eine sehr einfache Form bringen können.

Anders gesagt, multipliziert man eine Matrix C von links und rechts mit invertierbaren Matrizen R und S , dann kann man $C' = RCS$ auf sehr einfache Form

$$C' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

bringen, wobei $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(C)$ der Rang von C ist.

Interessanter ist, wenn C eine $n \times n$ -Matrix ist, die also zu einem Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ bzgl. einer Basis A gehört, also $C = M_{AA}(f)$. Dann kann man sich auf simultane Basiswechsel beschränken und versucht, durch geschickte Wahl von A die Matrix C möglichst einfach zu machen. Anders gesagt, man multipliziert C von links mit R und von rechts mit R^{-1} , also $C' = RCR^{-1}$. Dies nennt man eine Konjugation. Daran kann man nun viel mehr ablesen.

Und als drittes wird man dann noch die zulässigen R einschränken und nur mit speziellen R konjugieren.

Lemma 4.20. *Es sei $f : V \rightarrow W$ linear und es seien $\psi : V \rightarrow V$ und $\phi : W \rightarrow W$ Automorphismen. Dann gilt:*

$$(i) \ker(\phi \circ f \circ \psi) = \psi^{-1}(\ker(f))$$

$$(ii) \text{im}(\phi \circ f \circ \psi) = \phi(\text{im}(f))$$

Lemma 4.21. *Sei $M \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \in \text{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$ und $B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sowie A und B invertierbar. Dann gilt:*

$$(i) \mathcal{L}(AMB|0) = \ker(T_{AMB}) = T_B^{-1}(\mathcal{L}(M|0)) = T_{B^{-1}}(\mathcal{L}(M|0)) = B^{-1}(\mathcal{L}(M|0)) \\ := \{B^{-1}x \mid x \in \mathcal{L}(M|0)\}$$

$$(ii) \mathcal{W}(AMB) = T_A(\mathcal{W}(M)) = A\mathcal{W}(M) = \{y \in \mathbb{K}^m \mid \mathcal{L}(AMB|y) \neq \emptyset\}$$

Beweis:

Das erste Lemma war eine Übungsaufgabe, das zweite folgt aus dem ersten Lemma mit Isomorphismen

$$M_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \xrightarrow{\cong} \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad : L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$$

Korollar 4.22 (\rightarrow Übungsaufgabe 55). (i) $\text{rg}(\phi \circ f \circ \psi) = \text{rg}(f)$

$$(ii) \text{rg}(AMB) = \text{rg}(M)$$

Beweis: Wir wissen bereits aus Lemma 1:

$\ker(\phi \circ f \circ \psi) = \psi^{-1}(\ker(f))$, also ist $\dim(\ker(\phi \circ f \circ \psi)) = \dim(\psi^{-1}(\ker(f))) = \dim(\ker(f))$, weil ψ^{-1} ein Isomorphismus ist. Weiter gilt nach der Dimensionsformel:

$$n = \dim(V) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\text{im}(\phi \circ f \circ \psi)) + \dim(\ker(\phi \circ f \circ \psi)),$$

daraus folgt sofort die Behauptung $\text{rg}(f) = \text{rg}(\phi \circ f \circ \psi)$. □

4.4 Spaltenumformungen

Wir kennen für Zeilen folgende Umformungen:

$\mathfrak{M}_i[\lambda] :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Multiplikation der i -ten Zeile mit λ
$\mathfrak{A}_{ij} :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Addition der j -ten zur i -ten Zeile
$\mathfrak{V}_{ij} :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile

Analog gilt für Spaltenumformungen:

$\mathfrak{M}'_i[\lambda] :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Multiplikation der i -ten Zeile mit λ
$\mathfrak{A}'_{ij} :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Addition der j -ten zur i -ten Zeile
$\mathfrak{V}'_{ij} :$	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile

Voller Gaußalgorithmus

Satz 4.23. Jede Matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $rg(A) = r$ kann durch Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Form wie $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gebracht werden.

Beweis:

- (1) Der einfache Gauß-Algorithmus, das heißt wenn nur Zeilenumformungen benutzt werden, bringt A zunächst auf die Form
- (2) Durch Vertauschen der Spalten j_1, \dots, j_r auf die Plätze $1, \dots, r$, also durch ein "nach vorne ziehen", erhalten wir
- (3) Dividieren der Spalte 1 durch π_1, \dots , Spalte r durch π_r , erhalten wir
- (4) Als letzten Schritt werden alle Spalten "ausgeräumt"

4.5 Spezielle Matrizen

Sei im Folgenden n fest gewählt.

a) Elementarmatrizen

Für $1 \leq k \neq l \leq n$ sei

$$E^{kl} = \mathbb{1}_n + \tilde{E}^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Elementarmatrix. Dann ist E^{kl} invertierbar mit $(E^{kl})^{-1} = \mathbb{1} - \tilde{E}^{kl}$, denn es gilt

$$(\mathbb{1} + \tilde{E}^{kl})(\mathbb{1} - \tilde{E}^{kl}) = \mathbb{1}^2 - (\tilde{E}^{kl})^2 = \mathbb{1} - 0 = \mathbb{1}.$$

Etwas allgemeiner gilt für $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$: $E^{kl}[\lambda] = \mathbb{1} + \lambda \tilde{E}^{kl}$,

$$E^{kl}[\lambda] : \begin{array}{l} e_k \mapsto e_k \\ e_l \mapsto e_l + \lambda e_k \\ e_i \mapsto e_i (i \neq k, l) \end{array}$$

Geometrisch betrachtet erhalten wir Scherungen:

$$n = 2 : \quad E^{12}[\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.24. Für die Elementarmatrizen gelten

- (1) $E^{kl}[0] = \mathbb{1}$
- (2) $E^{kl}[\lambda] \cdot E^{kl}[\mu] = E^{kl}[\lambda + \mu]$, insbesondere
 $(E^{kl}[\lambda])^s = E^{kl}[s\lambda]$
- (3) $E^{kl}[\lambda]^{-1} = E^{kl}[-\lambda]$
- (4) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{kl}[\mu] E^{ij}[-\lambda] \cdot E^{kl}[-\mu] = \mathbb{1}$, $i \neq l, j \neq k$
- (5) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{jl}[\mu] \cdot E^{ij}[-\lambda] \cdot E^{jl}[-\mu] = E^{il}[\lambda\mu]$, $i \neq l$
- (6) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{ki}[\mu] \cdot E^{ij}[-\lambda] \cdot E^{ki}[-\mu] = E^{kj}[-\lambda\mu]$, $j \neq k$
- (7) $(E^{ij}[1] \cdot E^{ji}[1]^{-1} \cdot E^{ij}[1])^4 = \mathbb{1}$

Beweis:

Man kann solche Formeln durch Nachrechnen beweisen, oder man kontrolliert, dass beide Seiten auf den Standardbasisvektoren e_1, \dots, e_n das gleiche tun. Eine gute Methode ist auch folgende: Man rechnet das im kleinsten Fall $n = 2$ oder einem anderen kleinen Wert nach, und nennt die kleinen Matrizen kurz $e^{ij}[\lambda]$. Dann sieht man schnell, dass die Gleichungen auch für die durch $\mathbb{1}$ ergänzte große Elementarmatrix

$$E^{ij}[\lambda] = \begin{pmatrix} e^{ij}[\lambda] & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

gelten. Und zum Schluss benutzt man $E^{ij}[\lambda] = PE^{ij}P^{-1}$ für ein geeignetes P , wenn k, l beliebig ist. \square

Bemerkung 4.25. Ausdrücke der Form $aba^{-1}b^{-1}$ nennt man einen *Kommutator*.

b) **Streckungsmatrizen**

Sei $k = 1, \dots, n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann definieren wir die Streckungsmatrix als

$$D_k[\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.26. Es gilt

- (1) $D_k[1] = \mathbb{1}$
- (2) $D_k[\lambda] \cdot D_k[\mu] = D_k[\lambda\mu]$, insbesondere
 $D_k[\lambda]^s = D_k[\lambda^s]$
- (3) $D_k[\lambda]$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda \neq 0$ ist, und in diesem Fall ist $D_k[\lambda]^{-1} = D_k[\frac{1}{\lambda}]$
- (4) $D_i[\lambda] \cdot D_j[\mu] = D_j[\mu] \cdot D_i[\lambda]$

c) **Diagonalmatrizen**

Matrizen der Form $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ heißen Diagonalmatrizen.

Lemma 4.27. Es gilt

- (1) $D[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = D[\lambda_1] \cdot \dots \cdot D[\lambda_n]$
- (2) $D[1, \dots, 1] = \mathbb{1}$

$$(3) D[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \cdot D[\mu_1, \dots, \mu_n] = D[\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n] m u_n$$

$$(4) D[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \text{ ist genau dann invertierbar, wenn } \lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0, \text{ in diesem Fall ist } D[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^{-1} = D[\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}]$$

d) **Permutationsmatrizen**

Eine *Permutation* auf den Ziffern $1, \dots, n$ ist eine Bijektion $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, zusammen mit einer Abbildung

$$f_\sigma : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad e_k \mapsto e_{\sigma(k)},$$

die also eine Permutation der Standardbasis darstellt. Die dazugehörige Matrix sei

$$P_\sigma = M_{SS}(F_\sigma).$$

Sie hat in jeder Zeile i genau einen von Null verschiedenen Eintrag, und zwar an der Stelle $j = \sigma^{-1}(i)$ eine 1, und sie hat in jeder Spalte j genau einen von Null verschiedenen Eintrag, und zwar an der Stelle $i = \sigma(j)$ eine 1.

Beispiel 4.28.

- $\sigma = id$

- Transposition $(i j) : i \mapsto j, j \mapsto i, k \mapsto k$ für $k \neq i, j$

Lemma 4.29. *Es gilt*

(1) $P_{id} = \mathbb{1}$

(2) $P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma\tau}$

(3) P_σ ist invertierbar und es ist $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

(4) $P_{(i j)}^{-1} = P_{(i j)}$ für eine Transposition $(i j)$

Lemma 4.30.

1. $P_\sigma E^{ij}[\lambda] P_\sigma^{-1} = E^{\sigma(i)\sigma(j)}[\lambda]$

2. $P_\sigma D_k[\lambda] P_\sigma^{-1} = P_{\sigma(k)}[\lambda]$

3. $P_\sigma D(\lambda_1, \dots, \lambda_k) P_\sigma^{-1} = D(\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(k)})$

4. $P_\sigma P_\varepsilon P_\sigma^{-1} = P_{\sigma\varepsilon\sigma^{-1}}$

5. $D_j[\lambda^{-1}] E^{ij}[\mu] D_i[\lambda] = E^{ij}[\lambda\mu]$

Was bewirken diese Matrizen?

Proposition 4.31. Sei $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), \lambda \neq 0$

1. $E^{ij} A = \mathfrak{A}_{ij}(A)$ Addition der j-ten Zeile zur i-ten

2. $D_i[\lambda] A = \mathfrak{M}_i[\lambda](A)$ Multiplikation der i-ten Zeile mit λ

3. $P_{ij} A = \mathfrak{V}_{ij}(A)$ Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile

Proposition 4.32. Sei $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), E^{ij}, D_i[\lambda], P_{\sigma(j)} \in Mat_{n,m}(\mathbb{K}) \lambda \neq 0$

1. $AE^{ij} = \mathfrak{A}'_{ij}(A)$ Addition der j-ten Zeile zur i-ten
2. $AD_i[\lambda] = \mathfrak{M}'_i[\lambda](A)$ Multiplikation der i-ten Zeile mit λ
3. $AP_{\sigma(j)} = \mathfrak{V}'_{ij}(A)$ Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile

Man stellt also fest:

1. Der vollständige Gauß-Algorithmus, angewandt auf A , ist nichts anderes als sukzessives Multiplizieren von links oder rechts mit Elementarmatrizen, Streck- oder Vertauschmatrizen. Gauß macht aus der Matrix A die Matrix $A' = ZAS$, wobei Z das Produkt aller verwendeten Elementar-, Streck- und Vertauschmatrizen ist, in der richtigen Reihenfolge sortiert nach Zeilen- und Spaltenumformungen. Hier ist $r = rg(A)$.
2. A sei quadratisch und invertierbar.
In diesem Fall kommt man ohne Spaltenumformungen aus. A wird durch Linksmultiplikation mit Z zu $A' = \mathbb{1} Z$ ist gleich A^{-1} . **Wichtig:** Man muss nicht wissen, ob A invertierbar ist, der Algorithmus bricht vorher ab.

Beispiel 4.33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Linksmultiplikation mit $E_{21}[-3]$ liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Linksmultiplikation mit $E^{12}[1]$ liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Linksmultiplikation mit $D_2[-\frac{1}{2}]$ liefert schließlich das Inverse A^{-1} . Die Inverse Matrix steht nun da, wo ursprünglich die Einheitsmatrix stand und an Stelle von A steht nun die Einheitsmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

4.6 Normalformen

Sei im Folgenden $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V mit $\dim(V) = n$ und W mit $\dim(W) = m$, sei weiter der $rg(f) = r$. Setze $V' := Ker(f)$ mit Basis $\mathcal{A}'' = (a''_1, \dots, a''_{n-r})$. Ergänze nun \mathcal{A}'' zu eine Basis \mathcal{A} von V , also $\mathcal{A} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'') = (a'_1, \dots, a'_r, a''_1, \dots, a''_{n-r})$. Dann gilt: (1) $f(a''_i) = 0$ mit $i = 1, \dots, n - r$. Das ist klar, denn Elemente im Kern werden auf Null geschickt.

(2) Setze $\mathcal{B}' := f(\mathcal{A}') = (f(a'_1), \dots, f(a'_r))$. \mathcal{B}' ist eine geordnete Basis von $im(f) \subseteq W$.

Warum ist das so? $0 = \lambda_1 f(a'_1) + \dots + \lambda_r f(a'_r) = f(\lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_r a'_r)$, da gleich Null muss $v' = (\lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_r a'_r) \in Ker(f)$. v' ist mit der Basis des Kerns darstellbar $v' = \mu_1 a''_1 + \dots + \mu_{n-r} a''_{n-r}$. Daraus folgt, dass $0 = (-\lambda_1) a'_1 + \dots + (-\lambda_r) a'_r + \mu_1 a''_1 + \dots + \mu_{n-r} a''_{n-r}$ und somit gelten muss, dass alle $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ und $\mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0$. Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = (f(a'_1), \dots, f(a'_r), b_1, \dots, b_{n-r})$. Dann ist

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Satz 4.34. Für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen Vektorräumen gibt es Basen \mathcal{A} in V und \mathcal{B} in W , so dass gilt

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ mit } r = rg(f)$$

Inbesondere gilt: Wenn f ein Isomorphismus ist und $m = n$ (d.h. V und W haben gleiche Dimension), dann ist $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f) = \mathbb{1}_n$

Beweis. nach obiger Konstruktion. □

Satz 4.35. *Für jede Matrix $M \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ gibt es invertierbare Matrizen A, B mit*

$$BMA = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Inbesondere gilt: Wenn M invertierbar ist, so ist $BMA = \mathbb{1}$

Beweis.

1. Gauß-Algorithmus mit $B = Z$ Produkt der Zeilenumformungen und $A = S$ Produkt der Spaltenumformungen.
2. $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}} : Hom(V, W) \longleftrightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K}) : L$. \mathcal{A} ist Basiswechselmatrix in V und \mathcal{B} ist Basiswechselmatrix in W .

□

5 Gruppen, Ringe und Algebren

Definition 5.1. Eine Funktion $f : G \rightarrow G'$ zwischen zwei Gruppen G, G' heißt **Homomorphismus**, falls gilt:

1. $f(1) = 1$,
2. $f(xy) = f(x)f(y)$

Bemerkung 5.2. • Es gilt $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

- $\text{ord}(f(x))$ teilt $\text{ord}(x)$, falls $\text{ord}(x)$ endlich; insbesondere hat $f(x)$ endliche Ordnung, wenn x endliche Ordnung hat.
- Isomorphismus: f bijektiv $\xrightarrow{\sim}$
 Epimorphismus: f surjektiv \twoheadrightarrow
 Monomorphismus: f injektiv \hookrightarrow
 Endomorphismus: $G = G'$
 Automorphismus: $G = G'$ und f Isomorphismus

Beispiel 5.3. 1. $G = \mathbb{Z} \rightarrow G' = \mathbb{Z}, f(x) = nx$
 $n \neq 0$: mono, $n = \pm 1$: iso

2. $\mathcal{S}_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n, \mathcal{S}_n(x) \bar{x}$ Restklasse modulo n , epi

3. $\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) : \ln$

4. $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot), t \mapsto e^{2\pi it}$

5. $f : V \rightarrow V' f(x + y) = f(x) + f(y)$

6. $G = \text{GL}(V) \xrightarrow[\text{LCL}]{\text{MCL}} G' = \text{GL}_n(\mathbb{K}) \dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ Isomorphismus

7. $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}, \varepsilon(n) = \epsilon_n = (1 + \dots + 1)$ n -mal
 $\varepsilon(0) = 0, \varepsilon(n + m) = \varepsilon(n) + \varepsilon(m)$

8. $\mathbb{Z}/n \rightarrow \mu_n, k \mapsto \zeta_n^k, \zeta_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$

9. $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow[\sim]{\exp} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
 Umkehrfunktion: $\xleftarrow[\log]{}$ $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

10. $P : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n =$ Gruppe der Permutationsmatrizen
 $\sigma \mapsto P_\sigma$

11. $D : (\mathbb{K}^\times)^n \rightarrow \mathbb{D} =$ Gruppe der Diagonalmatrizen
 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

12. $g \in G : f_g : \mathbb{Z} \rightarrow G, k \mapsto g^k$
 $\text{ord}(g) = n \mathbb{Z}/n \rightarrow G, \bar{k} \mapsto g^k$

Definition 5.4 (Signum:). Auf den symmetrischen Gruppen definieren wir eine wichtige Funktion

$$\text{sign} : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

1. Warum ist $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$?
2. Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ nennt man einen **Fehlstand** von σ .
3. Hat σ genau k Fehlstände ($0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$), so gilt

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i)) = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq n} |j - i| = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i),$$

weil in den beiden mittleren Produkten die gleichen Faktoren in eventuell anderer Reihenfolge vorkommen.

Also ist $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$ bestimmt durch die Anzahl der Fehlstände.

Beispiel 5.5. 1. $\sigma = (ij)$ Transposition $\text{sign}(\sigma) = -1$

2. $\sigma = (123)$; $\text{sign}(\sigma) = \frac{3-2}{2-1} \frac{1-2}{3-1} \frac{1-3}{3-2} = +1$

Lemma 5.6. *sign ist ein Homomorphismus:*

$$\text{sign}(1) = 1$$

$$\text{sign}(\pi \circ \sigma) = \text{sign}(\pi) \cdot \text{sign}(\sigma)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{sign}(\pi \circ \sigma) &= \prod_{i < j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \prod_{k < l} \frac{\pi(l) - \pi(k)}{l - k} \cdot \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \text{sign}(\pi) \cdot \text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.7. 1. $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$ k -Zykel
 $= (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)$ $k - 1$ Faktoren
 $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

2. $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$

3. $\text{Typ}(\sigma) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$:
 $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{t_1 \cdot 0} \cdot (-1)^{t_2 \cdot 1} \dots (-1)^{t_n \cdot n} = (-1)^{n - (t_1 + t_2 + \dots + t_n)}$

Definition 5.8. Für einen Homomorphismus $f : G \rightarrow G'$ definieren wir

1. $\text{kern}(f) = \bar{f}(1) = \{x \in G \mid f(x) = 1\} \subseteq G$
2. $\text{im}(f) = f(G) = \{y \in G' \mid \exists x \in G f(x) = y\} \subseteq G'$

Lemma 5.9. 1. $\text{kern}(f)$ ist eine Untergruppe; f ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\text{ker}(f) = 1$ ist.

2. $\text{im}(f)$ ist eine Untergruppe; f ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $\text{im}(G) = G'$ ist.

Beweis. 1) $1 \in \ker(f)$, wegen $f(1) = 1$.

$$g_1, g_2 \in \ker(f) \Rightarrow f(g_1) = 1, f(g_2) = 1 \Rightarrow f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ist f ein Monomorphismus, so kann nur für $x = 1$ die Bedingung $f(x) = 1$ gelten. Angenommen $f(g_1) = f(g_2)$; dann ist $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2)^{-1} = 1$; also folgt aus $\ker(f) = 1$ nun $g_1 g_2^{-1} = 1$, also $g_1 = g_2$.

2) $1 = f(1)$, also $1 \in \text{im}(f)$.

Ist $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$, so ist $f(x_1 x_2) = y_1 y_2$. □

Beispiel 5.10.

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n$, $x \mapsto \bar{x}$ Restklasse mod n
 $\ker(f) = n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

2. $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, $\varepsilon(n) = n \cdot 1$
 $\ker(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \text{char}(\mathbb{K}) = 0$
 $\ker(\varepsilon) = p\mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{char}(\mathbb{K}) = p$ (Primzahl)

3. $L_g : \mathbb{Z} \rightarrow G$, $f(n) = g^n$ ($g \in G$ fest)
 $\ker(L_g) = 0 \Leftrightarrow \text{ord}(g) = \infty$
 $\ker(L_g) = n\mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{ord}(g) = n$

4. $L_{a,b} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$
 $L_{a,b}(t) = e^{a+ib)t}$
 $\text{im}(L_{a,b}) = \text{Spirale}$ (logarithmische oder Bernoulli'sche)

5. X Menge, G Gruppe: $\Gamma = \text{Funkt}(X, G)$ ist eine Gruppe:
 $(\gamma_1 \gamma_2)(x) := \gamma_1(x) \gamma_2(x)$, $1(x) := 1$, $\gamma^{-1}(x) := \gamma(x)^{-1}$

6. Ist X eine Gruppe, so ist $\text{Hom}(X, G)$ i.A. keine Untergruppe:

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \circ \gamma_2)(xy) &= \gamma_1(xy) \gamma_2(xy) = \gamma_1(x) \gamma_1(y) \gamma_2(x) \gamma_2(y) \\ (\gamma_1 \circ \gamma_2)(x) (\gamma_1 \circ \gamma_2)(y) &= \gamma_1(x) \gamma_2(x) \gamma_1(y) \gamma_2(y) \end{aligned}$$

Lemma 5.11. Für einen Homomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$ gilt:

1. $\phi(\text{Kom}(G)) \subset \text{Kom}(G')$
2. $\text{Kom}(G) \subset \ker \phi$, falls G' abelsch ist.

Beweis. 1): Ist $g = [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ ein Kommutator, so ist $\phi(g) = \phi(xyx^{-1}y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} = [\phi(x), \phi(y)]$ wieder ein Kommutator.

$[x, y]^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ auch Und ist g ein Produkt von Kommutatoren (und Inversen von Kommutatoren), so auch $\phi(g)$.

2): Ist G' abelsch, so ist $\text{Kom}(G') = 1$, also $\phi(\text{Kom}(G)) = 1$, also $\text{Kom}(G) \subset \ker(\phi)$:

Oder auf Elementen:

$$\phi[x, y] = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} = \phi(x)\phi(x)^{-1}\phi(y)\phi(y)^{-1} = 1. \quad \square$$

5.0.1 Vorwärtsschicken/ Rückwärtsschicken von Gruppenstrukturen

Ist (G, \cdot) eine Gruppe, $X = G'$ eine bloße Menge und $\phi : G \rightarrow X$ eine Bijektion, so kann man X derart zu einer Gruppe $(G', *)$ machen, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\phi : (G, \cdot) \rightarrow X = G' \text{ Bijektion}$$

vorwärtsgeschobene Gruppenstruktur auf G' :

$$x * y := \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y))$$

$$1^* := \phi(1)$$

$$x^{-1*} := \phi(\phi^{-1}(x)^{-1})$$

$$1) \phi^{-1}(x * y) = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)$$

$$2) \phi^{-1}(1^*) = 1$$

$$3) \phi^{-1}(x^{-1*}) = \phi^{-1}(x)^{-1}$$

$$\phi^{-1} : (G', *) \xrightarrow{\sim} (G, \cdot)$$

$$1') \phi(ab) = \phi(a) * \phi(b)$$

$$2') \phi(1) = 1^*$$

$$3') \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

$$\phi : (G, \cdot) \xrightarrow{\sim} (G, *)$$

Gruppenaxiome folgen aus (1-3) oder (1'-3'); man kann sie auch direkt nachprüfen:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \phi(\phi^{-1}(y) \cdot \phi^{-1}(z)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(y) \cdot \phi^{-1}(z)))) \\ &= \phi(\phi^{-1}(x) \cdot (\phi^{-1}y \cdot \phi^{-1}(z))) \\ &= \phi((\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)) \cdot \phi^{-1}(z)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(\phi(\phi^{-1} \cdot \phi^{-1}(y))) \cdot \phi^{-1}(z)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(x * y) \cdot \phi^{-1}z) \\ &= (x * y * z) \end{aligned}$$

Genau analog: Zurückziehen

$$X = G' \xrightarrow{\psi} (G, \cdot) \text{ Bijektion}$$

$$x * y := \psi^{-1}(\psi(x) \cdot \psi(y))$$

$$1^* := \psi^{-1}(1)$$

$$x^{-1*} := \psi^{-1}(\psi(x)^{-1})$$

Beispiel 5.12.

$$1. \text{ Tangens: } (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\tan} (\mathbb{R}, *)$$

(nicht für $n\frac{\pi}{2}$ definiert!)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$x * y := \frac{x+y}{1-xy}$$

$$2. G = \mathbb{R} \text{ mit arithmetischen Mittel}$$

$$G' = \mathbb{R}_{>0}, \psi := \ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\exp\left(\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(xy)}{2}\right) = \exp(\ln \sqrt{xy}) = \sqrt{xy}$$

geometrisches Mittel: mit $\psi = \ln$ zurückgezogenes arithmetisches Mittel.

$$G' = \mathbb{R}_{>0}, \psi := \frac{1}{t}$$

$$\left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{2xy}{x+y}$$

harmonisches Mittel: mit $\psi = \frac{1}{t}$ zurückgezogenes arithmetisches Mittel

$$3. G = (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\psi = (\cdot)^3} G' = \mathbb{R}$$

$$x * y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = x + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y$$

$$x^{-1*} = -x$$

$$0^* = 0 \quad \text{„Deformation der Addition“}$$

5.0.2 Einige wichtige Isomorphismen

1. $\mathbb{R}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n \xrightarrow{\sim} \text{Rot}_n \subset D_{2n}$ Diedergruppe
 $\bar{k} \mapsto \zeta_n^k \mapsto \mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$
2. BEISPIEL FEHLT
3. $\text{GL}(V) \xrightarrow[L_{\mathcal{A}\mathcal{A}}]{M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}} \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $n = \dim V$, $\mathcal{A} = \text{Basis von } V$
 (Isomorphismus hängen von der Basis \mathcal{A} ab).
4. $\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} P_n$ Permutationsmatrizen
 $\sigma \mapsto P_\sigma$
5. $\text{Zen}(\text{GL}_n(V)) \simeq \text{Zen}(\text{GL}_n(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}^\times$, $n \geq 3$
 Diagonalmatrizen $D_n \rightarrow (\mathbb{K}^\times)^n$
 $D[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
6. Diedergruppen: $D_2 \simeq \mathcal{S}_2$, $D_4 \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, $D_6 \simeq \mathcal{S}_3$
7. Platonische Körper Beispiele FEHLEN
8. Automorphismengruppen
 - a) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}$, $-\text{id} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto -n$
 $\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\text{id}, -\text{id}\} \simeq \mathbb{S}^0$
 - b) $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2$: nur die Identität
 $\bar{0} \mapsto \bar{0}$
 $\bar{1} \mapsto \bar{1}$
 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2) = \bar{1}$
 - c) $\mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{Z}/3$: außer der Identität noch $\theta = -\text{id}$.
 $\theta : \bar{0} \mapsto \bar{0}$
 $\bar{1} \mapsto \bar{2}$
 $\bar{2} \mapsto \bar{1}$
 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/3) \simeq \mathbb{S}^0$

5.1 Normale Untergruppen

5.2 Produkte

Definition 5.13. Gegeben seien zwei Gruppen G_1 und G_2 . Wir definieren eine neue Gruppe $G = G_1 \times G_2$ mit

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$$

$$(x_1, x_2)^{-1} := (x_1^{-1}, x_2^{-1})$$

$1 := (1, 1)$ Offenbar ist das wieder eine Gruppe und wird **direktes Produkt** genannt.

Beispiel 5.14.

$$BV = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2} \quad n_1 + n_2 = n$$

$$(\mathbb{R}^\times, \cdot) \simeq (\mathbb{S}^0, \cdot) \times (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$$

$$x \mapsto \left(\frac{x}{|x|}, |x| \right)$$

$$\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$$

$$z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, |z| \right)$$

$V \supset U_1, U_2$ Untervektorräume,

$V = U_1 + U_2, U_1 \cap U_2 = 0$

$V \simeq U_1 \times U_2 =: U_1 \oplus U_2$ interne direkte Summe:

$(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$

beispiel 5 hat n Diagramm...

Rest von Kapitel 5.5 fehlt! (Diagramme etc)