Lineare Algebra I

Mitschriften-Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

Überblick

1. Lineare Gleichungssysteme
2. Vektorräume (und Körper)
3. Basen, Dimensionen, lineare Unabhängigkeit
4. Lineare Abbildungen und Matrizen
5. Determinanten
6. Eigenwerte und Eigenvektoren
7. Normalenform
8. Skalarprodukt
9. Hauptachsentransformationen

Achtung:

Diese Version des Skriptes ist nicht vollständig korrigiert! Verbesserungsvorschläge können an lina-skript@tauradian.de geschickt werden.

Vorwort

Lineare Algebra:

- Theorie der linearen Gleichungssysteme
- Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen
- Theorie der Matrizen und Vektoren
- Unbekannte / Variablen x kommen nur zur ersten Potenz vor
- Keine gemischten Terme $x_i \cdot x_j$

1 Gleichungssysteme

1.1 Rechnen im $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Algebraische Aspekte

Definition 1.1. Grundkörper $\mathbb{R}$ = *reelle Zahlen*

Definition 1.2. Der $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ besteht aus Elementen, die man sich auf zwei Weisen vorstellt:

(i) Zahlentupel = Zeilenvektoren: $x = (x_1, \ldots, x_n)$
   - x_i = Einträge, Koordinaten, Komponenten
     z.B. Punkte im $\mathbb{R}^3 : P = (x_1, x_2, x_3)$

(ii) Spaltenvektoren: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

   Für beide Auffasungen gibt es nun Operationen, wir notieren sie für einen Spaltenvektor:
   - Addition: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$
   - Skalierung: $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$
   - Nullvektor: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Unterschied: Wird bei der Matrizenmultiplikation deutlich werden.

Satz 1.3. ***Rechenregeln***
$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x + y = y + x$
$x + 0 = x$
$-x = (-1) \cdot x$
$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$

Definition 1.4. Skalarprodukt
$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ definiert man ein sogenanntes **Skalarprodukt**: $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
$\langle x, y\rangle$ ist linear in x (bei festem y) und linear in y (bei festem x). Das nennt man bilinear.

Satz 1.5. ***Rechenregeln***
$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
$\langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$
$\langle x,y+y'\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle$
$\langle 0,y\rangle = 0$
$\langle \lambda x,y\rangle = \lambda \cdot \langle x,y\rangle$
$\langle x,\mu y\rangle = \mu \cdot \langle x,y\rangle$
$(\forall y : \langle x,y\rangle = 0) \implies x = 0$

Beweis. Angenommen $x \neq 0 \Rightarrow \exists i : x_i \neq 0$.
Setze $y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, also $y_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$
Dann gilt $0 = \langle x,y\rangle = x_i \cdot y_i = x_i$. Widerspruch. □

Das waren algebraische Aspekte (unabhängig von $\mathbb{R}$, gilt in jedem Körper $\mathbb{K}$bzw. in seinem Spaltenvektorraum K^n)

1.1.2 Geometrische Aspekte

Definition 1.6.

- *Betrag*: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ Diese Formel ist die Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$
- *Winkelmessung*: $\cos(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $(x,y \neq 0)$
- *Matrix* = rechteckiges Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  Der erste Index zählt die Zeilen, der zweite Index zählt die Spalten.

  Spalte: $S_j(A)$ j-te Spalte
  Zeile: $Z_i(A)$ i-te Zeile

- *Nullmatrix* alle Einträge 0
- *Skalierung* von Matrizen: $\lambda \cdot A$ = jedes Element mit Lambda multiplizieren
- Addition, Subtraktion von Matrizen erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{mn}$ kann als Riesenspaltenvektor oder Riesenzeilenvektor oder Mittelweg mit n Spalten und m Zeilen aufgefasst werden.

Das Produkt einer $(m \times n)$-Matrix A mit einem Spaltenvektor x liefert einen neuen Spaltenvektor:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Satz 1.7. *Wir betrachten die Multiplikation mit einem festem A als Funktion als Funktion $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$.*

- $T_A(0) = 0$
- $T_A(\lambda x) = \lambda T_A(x)$
- $T_A(x' + x'') = T_A(x') + T_A(x'')$

1.1.3 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.8. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ der Art:

$$\begin{array}{lr} (G_1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ (G_m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

Die a_{ij} mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ heißen Koeffizienten die $b_i = 1, \dots, m$ heißen Werte des LGS. Wichtig: alles ist durchnummeriert.

Kompakte Schreibweise
$A = (a_{ij})$ = Matrix der Koeffizienten
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = Spaltenvektor der Unbekannten
$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektor der Werte
$A \cdot x = b$

Notation:
Gegeben A und b
$(A|b)$ = erweiterte Matrix

Definition 1.9. Ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, der simultan alle Gleichungen löst, heißt Lösung des LGS.

$$\mathcal{L}(A|b) := x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | Ax = b \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 1.10. 1. $A \in \mathbb{R}^{n \cdot m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$

2. Alles ist durchnummeriert
3. Es ist möglich, dass alle Koeffizienten $= 0$ sind: $A = 0$ ("triviales" LGS)
   $\mathcal{L}(0|b) = \begin{cases} R^n, & b = 0 \\ \emptyset, & b \neq 0 \end{cases}$
4. Es ist möglich, dass eine Zeile von A null ist.
   $b_j = 0 \implies$ Diese Gleichung ist überflüssig, $b \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(A|b) = \emptyset$
5. Es kann sein, dass eine Spalte von A null ist
   $a_{1i} = a_{2i} = ... = 0 \implies x_i$ "überflüssig"

Definition 1.11. Ist $b = 0$, so heißt das LGS $(A|0)$ homogen. Ist $b \neq 0$ so heißt das LGS inhomogen.

Bemerkung 1.12. Was hat das alles mit $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu tun?
$x \mapsto y := A \cdot x$

1. $(A|b)$ hat eine Lösung (d.h. $\mathcal{L}(A|b) \neq \emptyset$) genau dann, wenn $b \in \text{Bild}(T_A) = T_A(\mathbb{R}^n) =$ Wertemenge gibt, es also ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $T_A(x) = b$ gibt.
2. $0 \in \mathcal{L}(A|0)$ (d.h. $\mathcal{L}(A|0) \neq \emptyset$)

Ein homogenes System hat immer mindestens eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $x = 0$.

1.1.4 Struktur der Lösungsmenge

Satz 1.13. *(homogener Fall)*

(i) $(A|0)$ *hat immer die triviale Lösung*

(ii) $x \in \mathcal{L}(A|0) \implies \lambda x \in \mathcal{L}(A|0)$

(iii) $x, x' \in \mathcal{L}(A|0) \implies x + x' \in \mathcal{L}(A|0)$

Satz 1.14. *(inhomogener Fall)*

(i) $x, x' \in \mathcal{L}(A|b) \implies x - x' \in \mathcal{L}(A|0)$

(ii) *Sei* $\overline{x} \in \mathcal{L}(A|b)$

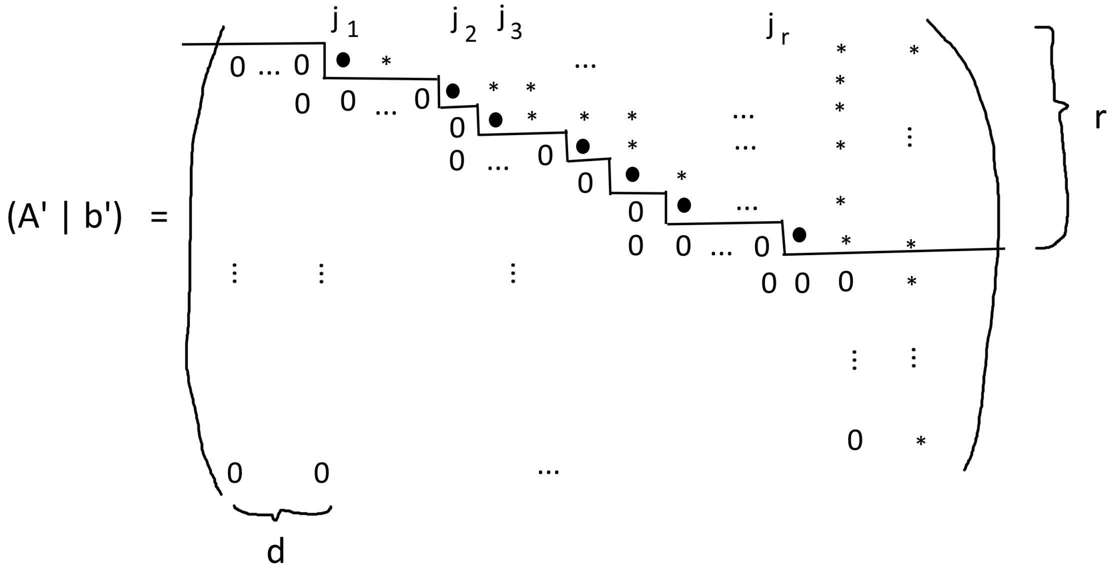
Dann gibt es zu jeder anderen Lösung $x \in \mathcal{L}(A|b)$ genau eine Lösung ζ des homogenen Systems mit $x = \overline{x} + \xi$

Beweis. (i) $x, x' \in \mathcal{L}(A|b) \implies Ax = b, Ax' = b$
$Ax - Ax' = b - b = 0$
$A(x - x') = 0$
Also $x - x' \in \mathcal{L}(A|0)$

(ii) Es gilt $A\overline{x} = b$
Ist $x \in L(A|b)$, also $Ax = b$, so haben wir nach (i) $x - \overline{x} = \xi \in \mathcal{L}(A|0)$
Also: $x = \overline{x} + \xi$
Und ξ ist eindeutig bestimmt: $x - \overline{x} = \xi$
$x - \overline{x} = \xi'$
$\implies \xi = \xi'$
□

1.1.5 Gauß-Algorithmus

Das Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, ein LGS $Ax = b$ durch Zeilenumformungen in die sogenannte Zeilenstufenform zu bringen; d.h. am Ende soll unser LGS folgendermaßen aussehen:



Die Einträge $\bullet$ sind von Null verschieden, $*$ ist beliebig und alles unter der Treppenlinie ist Null.
Die Größen d und r werden wichtige Charakteristiken sein.
Weil wir nur Zeilenumformungen verwenden werden, gilt:
$\mathcal{L}(A|b) = \mathcal{L}(A'|b')$
Und wir erhalten rekursiv eine Darstellung der Lösungsmenge.

Wir definieren zunächst den Begriff der Treppenfunktion.

Definition 1.15. Eine Treppenfunktion τ ist eine Funktion, die Spaltennummern $0, 1, ..., n$ auf Zeilennummern $0, 1, ..., m$ abbildet, sodass folgende Eigenschaften gelten:

- $\tau(0) = 0$
- $\tau(j) \leq \tau(j + 1)$ $(1 \leq j \leq n)$ monoton

- $\tau(j) = \tau(j-1) oder \tau(j-1)+1$ $(1 \leq j \leq n)$ Stufenhöhe ≤ 1

Eine Matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ ist in Zeilenstufenform, wenn eseine treppenfunktion τ gibt, sodass gilt:

- (ZSF 1) $a_{ij} = 0$ für $i > \tau(j) (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
- (ZSF 2) $a_{ij} \neq 0$ für $i = \tau(j)$, falls $\tau(j) > \tau(j-1)$ $(1 \leq j \leq n)$

Bemerkung 1.16. Wir werden zwar den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|b)$ anwenden, aber die Treppenfunktion bezieht sich nur auf A; wie werden sagen, $(A|b)$ sei in Zeilenstufenform, wenn A in Zeilenstufenform ist.

Bemerkung 1.17.
- Wir nennen die Stellen $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq n$, an dem τ springt (also $\tau(j_k) = \tau(j_k - 1) + 1$ die Sprungstellen.
- Die Anzahl der Sprungstellen nennen wir den <u>Rang</u> $rg(A) = r$ der Matrix (oder auch Zeilenrang); es ist immer $0 \leq r \leq m, n$

Gauß-Algorithmus
Eingabe $(A|b)$
$A \in Mat_{m,n}(A), b \in \mathbb{R}^m$
Start: Setze $p \to 0, q \to 0$ (Hilfsvariablen)

1. Suche in den Spalten $S_j(A)$ in der Reihenfolge $j = q+1, ..., n$ einen Eintrag $a_{ij} \neq 0$ in der Reihenfolge $i = p+1, ..., m$.
   - Gibt es kein solchen a_{ij}, so gehe zu ENDE.
   - Sei $a_{ij} \neq 0$ mit j minimal unter $q < j \leq n$ und i minimal unter $p < i \leq m$
2. Vertausche Zeile i mit Zeile $p+1$
3. Subtrahiere von Zeile $i+1$ das $\frac{a_{p+1,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
   Subtrahiere von Zeile $i+2$ das $\frac{a_{p+2,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
   ...
   Subtrahiere von Zeile m das $\frac{a_{m,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
4. Setze $p \to p+1, q \to j$.
   - Ist $p = m$ oder $q = n$, gehe zu ENDE
   - Sonst gehe zu 1.

ENDE.
Ausgabe: $(A'|b')$ in Zeilenstufenform.

Bemerkung 1.18. Man nennt das a_{ij} in 1. ein Pivotelement.

Satz 1.19. *Jedes LGS $(A|b)$ wird durch den Gauß-Algorithmus in ein äquivalentes LGS $(A'|b')$ mit gleicher Lösungsmenge überführt.*

Beweis.
1. Zunächst ist offensichtlich, dass für $A = 0$ das LGS $(0|b)$ bereits in Zeilenstufenform ist, und zwar für die konstante Treppenfunktion $\tau(0) = \tau(1) = ... = \tau(n) = 0$. Wie führen den Beweis durch Induktion über m.
2. Für $m = 1$ und $A \neq 0$ sei $a_{11} = ... = a_{1j-1} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$. Dann ist A bereits in Zeilenstufenform mit $\tau(0) = ... = \tau(j-1) = 0$ und $\tau(j) = ... = \tau(n) = 1$.

3. Für $m > 1$ führt ein erster Durchlauf des Gauß-Algorithmus für $A \neq 0$ an einem ersten Pivotelement $a_{i_1 j_1} \neq 0$. Nach Vertauschen und den Subtraktionen haben wir ein System und eine partiell definierte Treppenfunktion. Der zweite Durchlauf des Gauß-Algorithmus ist eigentlich ein erster Durchlauf auf das neue System. Dieses hat noch $m - 1$ Zeilen. Nach Induktion wird es in Zeilenstufenform überführt.

$\square$

2 Körper und Vektorräume

2.1 Körper

2.1.1 Körperaxiome und Unterkörper

Definition 2.1. Ein *Körper* ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition),$\cdot$ (Multiplikation), die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Addition
  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
  2. $a + b = b + a$ (Kommutativität)
  3. Es gibt ein neutrales Element der Addition $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} + x = x$. Dieses bezeichnen wir mit 0.
  4. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{K}$, sodass $x + (-x) = 0$. (Existenz von additiv Inversen)
- Multiplikation
  5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität)
  6. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität)
  7. Es gibt ein neutrales Element der Multiplikation $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} \cdot x = x$. Dieses Element bezeichnen wir mit 1.
  8. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{K}$, sodass $x \cdot x^{-1} = 1$. (Existenz von multiplikativ Inversen)
- Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation
  9. $a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot c$ (Distributivität)
  10. $1 \neq 0$

Definition 2.2. Eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$ eines Körpers $\mathbb{K}$ nennen wir *Unterkörper*, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $x, y \in \mathbb{K}' \Rightarrow x + y \in \mathbb{K}', x \cdot y \in \mathbb{K}'$ (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation)
2. $0, 1 \in \mathbb{K}'$
3. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow -x \in \mathbb{K}'$
4. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{K}'$

Bemerkung 2.3. Wie wir es aus der Schule gewohnt sind, schreiben wir vereinfachend $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$. Dies sind jedoch erstmal nur Notationen, da wir keine Verknüpfung $-$, oder $/$ definiert haben.

Beispiel 2.4. Beispiele für Körper, die uns allen geläufig sind sind die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, oder auch die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, welche wir im nächsten Abschnitt definieren werden. Ein Beispiel für einen Teilkörper von $\mathbb{R}$, der nicht der Körper rationalen Zahlen ist, ist $(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, \cdot)$, wobei $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

2.1.2 Komplexe Zahlen

Definition 2.5. Der Körper der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ besteht aus der Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen

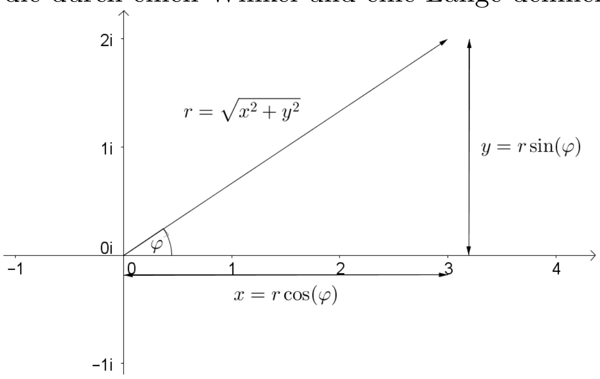
- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y)$

Es ist:

- $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
- $1_{\mathbb{C}} = e_1 = (1, 0)$
- $-(x, y) = (-x, -y)$
- $(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$

wie sich jeweils leicht nachrechnen lässt. Des weiteren stellen wir fest, dass $(e_2)^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0)$ und nennen e_2 die *imaginäre Einheit i*. Wir schreiben $(x, y) = x + iy$.
Dass für Addition und Multiplikation die gewünschten Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) gelten lässt sich leicht nachrechnen.

Definition 2.6. $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ kann als Zahl in der Gaußschen Zahlenebene interpretiert werden, die durch einen Winkel und eine Länge definiert ist.



mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist diese Darstellung eindeutig, wobei

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

r und φ nennen wir die *Polarkoordinaten* von z. Wir schreiben $z = (r; \phi)$

2.1.3 Endliche Körper

Bemerkung 2.7. Nachdem alle Körper, die uns bis hier hin begegnet sind unendlich viele Elemente hatten wollen wir nun versuchen zu einer Primzahl p einen Körper mit genau p Elementen, also einen endlichen Körper zu finden.

Definition 2.8. Man kann zeigen, dass es zu gegebenen $n, z \in \mathbb{Z}, n > 1$ eindeutige Zahlen $a, r \in \mathbb{Z}$ gibt mit $0 \leq r < n$, sodass $z = an + r$. Dies ist die Division durch n mit Rest r. Für ein gegebenes n wollen wir alle Zahlen als gleich auffassen, bei denen r gleich ist und sie in einer Menge zusammenfassen. Wir bezeichnen die Menge

$$[z] = \{z' \in \mathbb{Z} | z' = a'n + r, a' \in \mathbb{Z}\} = \{z' \in \mathbb{Z} | z' - z \text{ ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

als die *Restklasse von z modulo n*. Und nennen $z' \in [z]$ *Repräsentant* der Restklasse.

2.1.4 Inverse in $\mathbb{F}_p$

Satz 2.9. *Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $0 < b < a$, dann gilt:*

1. *Der $ggT(a,b)$ ist der letzte nicht verschwindende Rest r_n der folgenden Kette von Divisionen-*
$$\begin{array}{llcr} & a = q_1 b + r_1 & mit & 0 \leq r_1 < b; q_1, r_1 \in \mathbb{N} \\ & b = q_2 r_1 + r_2 & mit & 0 \leq r_2 < r_1; q_2, r_2 \in \mathbb{N} \\ mit\text{-}Rest & r_1 = q_3 r_2 + r_1 & & \\ & r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & mit & 0 \leq r_n < r_{n-1}; q_n, r_n \in \mathbb{N} \\ & r_{n-1} = q_{n+1} r_n & mit & q_{n+1} \in \mathbb{N} \end{array}$$

2. *Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft*
$$ggT(a,b) = \alpha a + \beta b.$$

Beweis.

1. Da die r_i strikt fallend, denn $b > r_1 > r_2 > ... > r_n > r_{n+1} = 0$, bricht der Algorithmus ab. Ist $t \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von a und b, so ist t auch Teiler von r_1 und damit auch von r_2 usw. bis schließlich r_n. Umgekehrt gilt: Ist t Teiler von r_n, so auch von r_{n-1}, r_{n-2}, usw. bis a und b.

2. Löse die Gleichung rückwärts auf und setze ein.

□

2.1.5 Charakteristik eines Körpers

Bisher konnte man den Eindruck gewinnen als läge $\lambda \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$, da öfters schon so gerechnet wurde. Dies ist nicht so. Zwar gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sind keine Teilmenge von $\mathbb{F}_p$. Daher soll von jetzt an als Vereinbarung gelten, dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$nx := x + x + ... + x \text{ (n-mal)}.$$

Dies ist also nicht die Multiplikation von Körperelementen. Nun das Ganze etwas genauer in folgender

Definition 2.10. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$\varepsilon_0 := 0$$
$$\varepsilon_1 := 1$$
$$\varepsilon_{n+1} := \varepsilon_n + 1 \qquad (n \geq 1)$$
$$\varepsilon_n := -\varepsilon_{-n} \qquad (n \leq -1)$$

Also
$$\varepsilon_n := n \cdot 1$$

Definition 2.11. Falls kein $\varepsilon_n = 0$ mit $n > 0$, so hat $\mathbb{K}$ die *Charakteristik* 0, und schreibt
$$char(\mathbb{K}) = 0.$$

Andernfalls nennt man das kleinste $n \geq 1$ mit $\varepsilon_n = 0$ die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$, schreibe
$$char(\mathbb{K}) = n.$$

Beispiel 2.12.
1. $char(\mathbb{Q}) = char(\mathbb{R}) = char(\mathbb{C}) = 0$
2. $char(\mathbb{F}_p) = p$ (p ist eine Primzahl)

Bemerkung 2.13. Ist $char(\mathbb{K}) = 0$, so ist $\mathbb{Q}$ ein Unterkörper.
Denn

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\frac{n}{m} \longmapsto \varepsilon_n \cdot \varepsilon_n^{-1},$$

so ergibt sich $\varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ und $\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b = \varepsilon_{ab}$ und somit erhält man ein $\mathbb{K}' = \{x - \varepsilon_n \cdot \varepsilon_m^{-1} | n, m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0\}$ mit $\varepsilon_0 = 0$ und $\varepsilon_1 = 1$.

Definition 2.14. Eine Funktion $\phi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}'$ zwischen zwei Körpern heißt *Körperhomomorphismus*, falls gilt

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
2. $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$
3. $\phi(0) = 0$ und damit auch $\phi(-x) = -\phi(x)$
4. $\phi(1) = 1$ und damit auch $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, falls ϕ injektiv und $x \neq 0$

Beispiel 2.15. $\mathbb{R} \hookrightarrow /C$ mit $x \longmapsto (x, 0)$ ist ein *Körperisomorphismus* auf einem Unterkörper.

Satz 2.16. *Ist $char(\mathbb{K}) > 0$, so ist $char(\mathbb{K})$ eine Primzahl.*

Beweis. Sei $char(\mathbb{K}) = n$ mit $n > 0$ und $n = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ sowie $1 < a,\ b < n$. Das heißt n ist keine Primzahl. Dann wäre $0 = \varepsilon_n = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b$ mit $\varepsilon_a, \varepsilon_b \neq 0$ und somit gäb es einen Nullteiler. □

2.2 Vekrorräume

2.2.1 Vektorraumaxiome

Im folgenden Abschnitt ist mit $\mathbb{K}$ immer ein Körper gemeint.

Definition 2.17. Ein *Vektorraum V* über $\mathbb{K}$ ist eine Menge mit einer Verknüpfung und einer Operation.
Addition:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \text{ mit } (x, y) \longmapsto x + y$$

Skalierung:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \text{ mit } (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x, y \in V : \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in V : \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists 0 \in V\ \forall x \in V : \quad x + 0 = x = 0 + x$
4. $\forall x \in V \exists -x : \quad x + (-x) = 0 = (-x) + x$
5. $\forall x \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
6. $\forall x \in V : \quad 1 \cdot x = x$
7. $\forall \lambda \in K,\ \forall x, y \in V : \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
8. $\forall x \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

Proposition 2.18.

1. $0 \cdot x = 0$
2. $\lambda \cdot 0 = 0$
3. $(-1) \cdot x = -x$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in V: \quad \lambda \cdot x = 0 \implies \lambda = 0$ oder $x = 0$

Beweis. Übungsaufgabe □

Beispiel 2.19.

1. $\mathbb{K}^n$ mit $n > 0$ ist ein Vektorraum. Denn die Addition ist definiert durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und die Skalierung durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$. Die Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.
2. Insbesondere ist $\mathbb{K}^0 = \{0\}$ der *triviale* Vektorraum und $\mathbb{K}^1$ Vektorraum über sich selbst.
3. Auch $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit festem $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein Vektoraum. Auch hier lassen sich Addition und Skalierung sowie deren Eigenschaften leicht nachweisen.

Bemerkung 2.20. Vektorräume über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nennt man *rational*, *reell* bzw. *komplex*.

2.2.2 Unterraum

Sei V im Folgenden ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 2.21. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Unterraum* von V, falls gilt

1. $u, u' \in U \implies u + u' \in U$ (abgeschlossen unter der Addition)
2. $\lambda \in \mathbb{K}\ u \in U \implies \lambda \cdot u \in U$ (abgeschlossen unter Skalierung)

Bemerkung 2.22. Sei $u \in U$ beliebig und $\lambda = 0$, dann folgt daraus $0 \cdot u = 0 \in U$.

Beispiel 2.23.

1. $U = 0 = \{0\}$ ist Unterraum in jedem Vektorraum.
2. $V = \mathbb{K}^n,\ i = 1, ..., n\ U_i := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0\}$ ist Unterraum von V.
   $U_I := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0 \text{ für } i \in I\}\ I \subset 1, ..., n$ ist Unterraum von V.
3. $V = \mathbb{K}^n \quad U = \{x = (x_1, ..., n) \in \mathbb{K}^n | x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$ ist Unterraum von V.
4. $v \in V \quad U = \{tv | t \in \mathbb{K}\}$ ist Unterraum von V. Diesen Unterraum bezeichnet man auch als *Spann* bzw. *lineares Erzeugnis* von v. Manchmal nennt man ihn auch *lineare Hülle* von v. Doch dazu später mehr.
5. Sei $u, v, w \in V$, dann ist $U = Span(u, v, w) = \{x = \lambda u + \mu v + \nu w \in V | \lambda, \mu\nu \in \mathbb{K}\}$
6. $(A|0)$ sei homogenes LGS und $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, dann ist $Ł(A|0) \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum.
7. U_1, U_2 seien Unterräume von V, dann ist auch $U = U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.
   Allgemeiner: $U_i \subset V\ i \in I \implies U := \bigcap_{i \in I} U_i$. I muss nicht endlich sein. **Achtung!** Die Vereinigung von Unterräumen sind im Allgemeinen keine Unterräume mehr. Als einfaches Beispiel dafür dienen hier die beiden Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^2$ als Unterräume. Addiert man nämlich $(1, 0)$ aus dem x-Achsen-Unterraum zu $(0, 1)$ aus dem y-Achsen-Unterraum, so erhält man $(1, 1)$. $(1, 1)$ liegt aber nicht in der Vereinigung von den beiden

Koordinatenachsen. **Achtung!** Auch das mengenmäßige Komplement ist im Allgemeinen kein Unterraum. Das orthogonale Komplement allerdings schon. Denn sei $V = \mathbb{R}^n$ und $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}$, dann ist $U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 n_1 +, ..., +x_n n_n = 0\}$

8.

2.2.3 Körperwechsel

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[d, hook] & \times & \mathbb{L} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbb{L} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{L} & \times & \mathbb{L} \arrow[r] & \mathbb{L}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\lambda, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \lambda \cdot x \arrow[d, equal] \\
(\lambda, x) \arrow[r, mapsto] & \lambda x
\end{tikzcd}$$

2.3 Lineare Abbildungen

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ einen Körper; V und W seien Vektorräume über $\mathbb{K}$ (Man sagt auch: $\mathbb{K}$-Vektorräume).

Definition 2.24. Eine Funktion $f : V \longrightarrow W$ ist eine *lineare Abbildung*, falls gilt:

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mit $x, y \in V$

(iii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$.

Hierbei folgt (i) offensichtlich aus (iii): $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Lineare Abbildungen sind die zentralen Objekte der linearen Algebra; man könnte diese auch als Studium der linearen Abbildungen bezeichnen. Wir betrachten nun einige Beispiele:

Beispiel 2.25. 1. Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor x, wie wir sie bereits direkt zu Beginn eingeführt haben, ist eine lineare Abbildung: $V = \mathbb{K}^n$; $W = \mathbb{K}^m$; $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$
$f = T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $x \longmapsto A \cdot x$

2. Für ein $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ haben wir ein lineares Gleichungssysteme studiert. Ein Ergebnis war $W = \mathcal{L}(A|0) \subseteq \mathbb{K}^n$, die Lösungsmenge im homogenen Fall ist ein Untervektorraum. Mit $r = \mathrm{rg}(A)$ und $l = n - r$ erhalten wir die bekannte Parameterdarstellung des Lösungsraums als lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^l &\longrightarrow \mathcal{L}(A|0) \\ u &\longmapsto L(u) \end{aligned}$$

Diese lineare Abbildung ist außerdem bijektiv. (Eine solche Abbildung nennt man auch *Isomorphismus*.)

3. Geometrische Beispiele: Drehung, Streckung, Scherung und Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ lassen sich als Matrizenmultipliktion darstellen und sind somit lineare Abbildungen.

$$f = T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto A \cdot x$$

Die zur Drehung um ϕ assoziierte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur Streckung um λ_1 entlang der x-Achse und um λ_2 entlang der y-Achse ist:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Bei der Scherung bleibt eine Achse erhalten, in diesem Beispiel die x-Achse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \alpha x + y \end{pmatrix}$$

Zur Spiegelung an der y-Achse betrachte man

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

die Spiegelung an der Winkelhalbierenden ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Auch die Projektion ist eine lineare Abbildung. Jeder Vektor $v \in V = \mathbb{R}^2$ kann eindeutig geschrieben werden als $v = w + w'$ mit $w \in W$ und einem Vektor w', der auf der Geraden liegt, die von $\tilde{w}'$ aufgespannt wird. Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 = V \to W, w + w' = v \to w$ ist eine (surjektive!) lineare Abbildung.

4. Analytische Beispiele
Auf dem Vektorraum $V = C^{q+1}(\mathbb{R})$ der $(q+1)$-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen (mit der Addition $(f+g)(x) := f(x)+g(x), f, g \in V$) ist die Ableitung eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} D : C^{q+1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^q(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ die Ableitung von f nach x. Wegen der bekannten Ableitungsregeln, dass die Ableitung der Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, und dass die Ableitung einer skalierten Funktion gleich der skalierten Ableitung ist, sind Ableitungen lineare Abbildungen. Insbesondere gilt für beliebig oft differenzierbare Funktionen ($q = \infty$):

$$\begin{aligned} D : C^{\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Auf dem Vektorraum $V = L^1([0,1])$ der über $[0,1]$ integrierbaren Funktionen ist die Integration eine lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} I : L^1([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_b^a f(x)dx \end{aligned}$$

mit $a, b \in [0,1]$. Hier gilt die analoge Regel, dass das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale ist.

Betrachten wir als letztes Beispiel $V = \mathcal{F}_{kov}$, den Vektorraum der reellen konvergenten Folgen $a = (a_0, a_1, \ldots)$. Die Grenzwertbildung ist eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \lim : V = \mathcal{F}_{konv} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a = (a_n) = (a_0, a_1, \ldots) &\longmapsto \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

Die Summe zweier konvergenter Folgen ist wieder eine konvergente Folge, also ist die Grenzwertbildung eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} (a_n) \longmapsto \lim a_n,\ b_n &\longmapsto \lim b_n \\ (a_n) + (b_n) &\longmapsto \lim a_n + \lim b_n. \end{aligned}$$

Proposition 2.26. Es seien U, V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, dann gilt:

(i) Die Identität $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V, x \longmapsto x$ ist linear.

(ii) Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen, dann auch die Verknüpfung $g \circ f : U \to W$.

(iii) Die Nullabbildung $0 : V \to W, x \mapsto 0$ ist eine lineare Abbildung.

(iv) Sind f, f' lineare Abbildungen, dann ist auch λf, definiert durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}$, wieder eine lineare Abbildung.

(v) Genauso ist auch $f + f'$ mit $(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$ eine lineare Abbildung. Beides folgt einfach aus der Tatsache, dass f und f' lineare Abbildungen sind (f' ist *nicht* die Ableitung von f!).

(vi) Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare bijektive Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear.

Beweis von Proposition (vi). Zu zeigen: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$. Seien $x, y \in W$. Da f bijektiv ist gilt: $\exists! x', y' \in V : x = f(x'), y = f(y')$; „$\exists!$“ bedeutet „es gibt eindeutig“. Dann folgt mit der Linearität von f:

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(x') + f(y')) = f^{-1}(f(x' + y') = x' + y' = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

Damit haben wir die Bedingung (ii) aus Definition 2.24 verfiziert. Wir zeigen nun Bedingung (iii): Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu zeigen: $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$. Auch dies folgt mit x' wie oben aus der Linearität von f:

$$f^{-1}(\lambda x) = f^{-1}(\lambda f(x')) = f^{-1}(f(\lambda x')) = \lambda x' = \lambda f^{-1}(x)$$

□

Definition 2.27. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

(i) Die Teilmenge von W $\mathrm{im}(f) = f(V) := \{x \in W | x = f(x') \text{ für } x' \in V\} \subseteq W$ heißt *Bild von f* (engl. *image*).

(ii) Die Teilmenge von V $\ker(f) = f^{-1}(0) := \{x \in V | f(x) = 0\} \subseteq V$ heißt *Kern von f* (engl. *kernel*).

Proposition 2.28. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

(i) Das Bild $\mathrm{im}(f)$ ist ein Untervektorraum in W.

(ii) Der Kern $\ker(f)$ ist ein Untervektorraum in V.

(iii) Ist $b \in \mathrm{im}(f)$ und etwa $f(\xi) = b$, so ist $f^{-1}(b)$ ein affiner Unterraum und zwar $f^{-1}(b) = \ker(f) + \xi$.

Ein Spezialfall von (iii) ist, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems im inhomogenen Fall ein affiner Unterraum ist.

Beweis. (i) Seien $x, y \in \mathrm{im}(f)$, sodass $x = f(x'), y = f(y')$ für $x', y' \in V$. Daraus folgt, dass $x + y = f(x') + f(y') = f(x' + y')$. Also liegt $x + y$ im Bild von f.

(ii) Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y) = 0$, also $x, y \in \ker(f)$. Dann gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0$. Damit liegt auch $x + y$ im Kern von f.

(iii) Sei $b \in \mathrm{im}(f)$ mit $f(\xi) = b$. Für $x \in V$ mit $f(x) = b$ gilt:

$$f(x - \xi) = f(x) - f(\xi) = b - b = 0$$

Also liegt $x - \xi$ im Kern von f.

$\square$

Beispiel 2.29. Betrachten wir wieder die Matrizenmultipliktion: $f = T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto T_A(x) = A \cdot x$ mit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\ker(T_A) = T_A^{-1}(0) = \mathcal{L}(A|0)$. Der Kern ist der Lösungsraum des assoziierten linearen Gleichungssystems im homogenen Fall.
- $\mathrm{im}(T_A) = \{b \in \mathbb{K}^m | \mathcal{L}(A|b) \neq \}$. Das Bild ist die Menge der Vektoren, für die das assoziierte lineare Gleichungssystem im inhomogenen Fall lösbar ist.
- Falls $b \in \mathrm{im}(T_A)$ mit etwa $T_A(\xi) = b$, so ist $T_A^{-1}(b) = \mathcal{L}(A|b) = \mathcal{L}(A|0) + \xi$, der Lösungsraum des inhomogenen und lösbaren Falls.

Beispiel 2.30. Die *komplexe Konjugation* $\overline{}$ ist ein Beispiel für eine Abbildung, die $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist.

$$\begin{gathered} \overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy \end{gathered}$$

Die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus, denn

$$\overline{0} = 0;\ \overline{1} = 1;\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ \text{(Multiplikativität).}$$

$\mathbb{C}$-Linearität würde bedeuten $\overline{z_1 z_2} = z_1 \cdot \overline{z_2}$. Die Abbildung kann also nicht sowohl ein Körperisomorphismus sein als auch $\mathbb{C}$-linear. Da die komplexe Konjugation multiplikativ ist, ist sie lediglich $\mathbb{R}$-linear:

$$\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} = \mathrm{Fix}(\overline{})$$

Definition 2.31. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt *affin*, falls es eine linere Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, und ein $b \in W$ mit $f(x) = \varphi(x) + b$.

Beispiel 2.32.

1. Die Translation $\tau_b : W \to W$ mit $0 \neq b \in W, w \mapsto +b$ ist immer eine affine Abbildung
2. Die Abbildung $f(x) = mx + b$ mit $m \in \mathbb{K}$ ist eine affine Abbildung. *Achtung!:* In der Schule und der Analysis werde solche Funktionen als lineare Funktionen bezeichnet. In der linearen Algebra sind dies aber im allgemeinen affine Funktionen!

3. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Lösungsmenge $\mathcal{L}(A|b)$ eines Linearen Gleichungssystems $(A|b)$ der Größe $m \times n$, wobei $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n, r = rg(A), l = n - r$ Es sei L^0 die Parameterdarstellung für den homogenen Fall, also
$$L^0 : \mathbb{R}^l \to \mathcal{L}(A|b); U = (U_0, U_1, \ldots, U_r) \mapsto L^0(U) = (U_0, L_1, U_1, L_2, U_2, \ldots, L_r, U_r)$$
wobei $L_1 = L_1(U_1, U_2, \ldots, U_r), L_2 = L_2(U_2, U_3, \ldots, U_r), \ldots, L_r = L_r(U_r)$ Nun suchen wir uns irgend eine Lösung $\xi \in \mathcal{L}A|b$ des inhomogenen Gleichungssystems. Für den Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems gilt nun:
$$L = L^0 + \xi; L(U) = L^0(U) + \xi$$
4. Es sei f eine affine Abbildung. Offenbar ist $f(0) = b$ die Translationskonstante, während $f(x) - b = \Phi(x)$ der so genannte lineare Anteil ist. Damit hat man für affine Abbildungen folgende Gleichungen:
$$\begin{aligned} f(\lambda x) - b =& \lambda(f(x) - b) \\ f(x + y) - b =& (f(x) - b) + (f(y) - b) = f(x) + f(y) - 2b \end{aligned}$$
5. Ist f eine lineare Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein linearer Unterraum.
   Ist f eine affine Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein affiner Unterraum.

Proposition 2.33. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Unterkörper von $\mathbb{L}$ (genau wie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) und V ein Vektorraum über Ł. Wir wissen, dass V dann auch ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Es kommt aber vor, dass eine Funktion $f : V \to W$ zwar linear ist, wenn man V als $\mathbb{K}$-Vektorraum betrachtet, es jedoch nicht ist, wenn man V als Ł-Vektorraum betrachtet.

Beispiel 2.34. Ein Beispiel für die eben genannten Funktionen ist die komplexe Konjugation über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
$$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy = z \mapsto \overline{z} = x - iy$$
Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-Linear, da man leicht nachrechnen kann, dass $\lambda(x, y) \mapsto (x, -y)$. Sie ist jedoch nicht $\mathbb{C}$-Linear, wie man leicht am Beispiel der Multiplikation mit i sieht. Es ist:
$$i \cdot \overline{(x, y)} = i \cdot (x, -y) = (x, y) \neq (-x, -y) = \overline{(-y, x)} = \overline{i \cdot (x, y)}$$
Abgesehen von der Linearität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl besitzt die komplexe Konjugation aber viele nützliche Eigenschaften. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt nämlich
$$\begin{aligned} &\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ &\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ &\overline{0} = 0, \overline{1} = 1 \\ &z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

2.3.1 Morphismen

Definition 2.35. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt f
Monomorphismus, wenn f injektiv
Epimorphismus, wenn f surjektiv
Isomorphismus, wenn f bijektiv Endomorphismus, wenn $V = W$ Automorphismus, wenn $V = W$, f bijektiv

Proposition 2.36. Es seien $f : V \to W$, $g : W - U$ linear. Dann gilt

- f ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow ker(f) = 0$
- $g \circ f$ ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist ein Monomorphismus
- $g \circ f$ ist ein Epimorphismus $\Leftrightarrow$ f ist ein Epimorphismus

3 Basen und Dimension

3.1 Erzeugendensystem

Definition 3.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v, e_1, e_2, ..., e_n \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und

$$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \tag{$*$}$$

Wir nennen $(*)$ eine Linearkombination (der $e_1, \ldots, e_n$ über $\mathbb{K}$), oder eine lineare Darstellung von v (durch $e_1, \ldots, e_n$ über $\mathbb{K}$). Ist $v = 0$, so nennt man $(*)$ eine lineare Relation zwischen den $e_1, \ldots, e_n$ (über $\mathbb{K}$). Sind alle $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, so nennt man $(*)$ eine triviale Linearkombination, oder triviale Darstellung von $v = 0$, oder eine triviale Relation.

Definition 3.2. Es sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Dann heißt

$Span(\xi) := \{v \in V | \text{Es gibt endlich viele } e_1, \ldots, e_n \in \xi \text{ und } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ so dass } v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\}$

Der Spann, oder das lineare Erzeugnis von ξ in V. Wir vereinbaren, dass $Span(\emptyset) = \{0\} = 0$.

Beispiel 3.3.

1. Ist $\xi = \{0\}$, so ist $Span(\xi) = 0$
2. Ist $u \in V$, $\neq 0$, so ist $Span(\{u\})$ die von u aufgespannte Gerade.
3. Sind $u_1, u_2 \neq 0$ nicht kollinear, also weder $u_1 \in Span(u_2)$ noch $u_2 \in Span(u_1)$, so ist $Span(u_1, u_2)$ eine Ebene.
4. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so nennen wir $e_i = (0, 0, \ldots, \underset{\text{i-te Stelle}}{1}, \ldots, 0)$ den i-ten Einheitsvektor. Für $0 \leq m \leq n$ ist $\xi_m = \{e_1, \ldots, e_m\}$ und $Span(\xi_m) = \mathbb{K}^m \subseteq \mathbb{K}^n$, wobei einfach die letzten $n - m$ Koordinaten 0 sind.
5. Ist $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\xi = \{1, \sqrt{2}\}$, so ist $Span(\xi) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$
6. Sind $U_i \subseteq V, i \in I$ Untervektorräume eines Vektorraumes V und ist $\xi = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, so nennen wir $Span(\xi) = \underset{i \in I}{+} U_i$ die Interne Summe der U_i

Proposition 3.4. Es Sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V

1. $0 \in Span(\xi)$
2. $\xi \subseteq Span(\xi)$ insbesondere ist $Span(V) = V$
3. $Span(U) = U$, falls U ein UVR ist
4. $Span(Span(U)) = Span(U)$
5. $Span(\xi)$ ist der kleinste UVR von V, der ξ enthält.
6. $Span(\xi)$ ist der Durchschnitt aller UVR von V welche ξ enthalten.

Definition 3.5. Eine Teilmenge $\mathcal{E}$ heißt *Erzeugendensystem von V*, falls gilt: $Span(\mathcal{E}) = V$.
V heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt

Uns interessiert dabei jedoch nur das kleinste Erzeugendensystem, beziehungsweise das $minimale Erzeugendensystem.$

Lemma 3.6. *Ist $\mathcal{E}$ ein EZS von V und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, e \in \mathcal{E}$, dann ist auch $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e\}) \cup \{\lambda \cdot e\}$ mit*
$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_i, \dots\}$
$\Downarrow \mathfrak{M}_i[\lambda]$
$\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots\}$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$
$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$

□

Lemma 3.7. *Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots\}$ ein EZS. Dann ist $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e_i\}) \cup \{e_i + e_j\}$ wieder ein EZS.*
$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots\}$
$\Downarrow \mathfrak{A}_j$
$\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, e_i + e_j, \dots, e_j, \dots\}$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$
$= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i (e_i + e_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i) e_j + \cdots + \lambda_n e_n$

□

Lemma 3.8. *Sei $\mathcal{E}$ ein EZS von V. Es gäbe in $\mathcal{E}$ eine nicht-triviale Relation, dh. es gibt $e_i, \dots, e_n \in \mathcal{E}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ wobei nicht alle $\lambda_i = 0$ und es gelte $0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$ und etwa $\lambda_i \neq 0$. Dann ist $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \{e_i\}$ wieder ein EZS von V.*

Beweis. Es gilt:
$e_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \underbrace{\hat{\lambda_i e_i}}_{[*]} + \cdots + \lambda_n e_n)$
$[*] = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \lambda_n e_n)$
d.h. $e_i \in Span(\mathcal{E}) = Span(\mathcal{E} - e_i)$
Also: wenn immer e_i in einer Darstellung eines $v \in V$ vorkommt gilt:
$v = \alpha_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \underset{\downarrow}{\alpha_{i_k} e_{i_k}} + \cdots + \alpha_{i_m} e_{i_m}$
$\quad = \alpha_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \alpha[*] + \cdots + \alpha_{i_m} e_{i_m}$

□

3.2 Lineare Unabhängigkeit

V = Vektorraum über $\mathbb{K}$
$\mathcal{B} \subseteq V$ Teilmenge

Definition 3.9. $\mathcal{B}$ heißt *linear unabhängig* in V, falls gilt:
$b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$ sind paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
Wenn $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$ gilt, dann nur deshalb, weil $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung 3.10. $\mathbb{B}$ ist NICHT "von" etwas unabhängig! Es IST linear unabhängig.

Bemerkung 3.11. Oder: Jedes b ist VON ALLEN ANDEREN linear unabhängig.
($\Leftrightarrow b$ kann nicht als Linearkombination der anderen geschrieben werden $\Leftrightarrow b \notin Span(\mathcal{B}, \{b\})$)

Bemerkung 3.12. Man sagt: Es gibt keine nicht-triviale Relation unter den Elementen von $\mathcal{B}$.

Bemerkung 3.13. Die Eigenschaft linearer Unabhängigkeit kommt in der Menge $\mathcal{B}$ vor, nicht in ihren Elementen.

Bemerkung 3.14. v ist linear unabhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \notin Span(\mathcal{B})$.
v ist linear abhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \in Span(\mathcal{B})$.

Bemerkung 3.15. $0 \notin \mathcal{B}$, falls $\lfloor$ linear unabhängig.
Denn sonst $0 = \lambda \cdot 0, \lambda \neq 0$ z.B. für $\lambda = 1$

Bemerkung 3.16. Wir setzen $\mathcal{B} = \emptyset$ ist linear unabhängig.

Beispiel 3.17. $\mathcal{B} = \{b\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b \neq 0$. Jede Relation müsste lauten $\lambda \cdot b = 0$

Beispiel 3.18. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b_1, b_2 \neq 0$ mit b_1, b_2 nicht kolinear
$b_1 = \lambda_2 b_2$
$b_2 = \lambda_1 b_1$
Beides ist nicht möglich, da $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = 0$

Beispiel 3.19. $V = \mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \leq n$, Standardeinheitsvektoren $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$, wobei 1 an i-ter Stelle steht.
$\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.

$$\text{Angenommen } \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

1. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
2. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \cdots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
$\vdots$
m. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_m \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_m = 0$

Satz 3.20. *$\mathcal{B} \subset V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $v \in Span(\mathcal{B})$ genau eine (oder eine eindeutige) Darstellung als Linearkombination besitzt.*
$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n$ für ein geeignetes $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Beweis. Angenommen wir hätten zwei Darstellungen
$v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} b_{i_n}$
$v = \lambda_{j_1} b_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$
Dann gilt:
$0 = v - v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} b_{i_n} - \lambda_{j_1} b_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$
Wir fassen zusammen und kürzen weg. Deshalb können wir folgendes annehmen:
alle b_{i_r} und b_{j_r} sind paarweise verschieden und alle λ_{i_r} und $\lambda_{j_r} \neq 0$

Sind die Darstellungen verschieden, so gibt es mindestens ein $b_{i_k} = b_{j_l}$, aber $\lambda_{i_k} \neq \lambda j_l$.
Dann ist die rechte Seite eine nicht triviale Relation. Aber $\mathcal{B}$ war als linear unabhängig angenommen.
Widerspruch! $\square$

$V = P_n(\mathbb{K}) \ni p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
$a_i \in \mathbb{K}$ $\quad$ $p'(x) := a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^n$ ist die formale Ableitung
$\quad W = P_{n-1}(\mathbb{K})$ $\quad$ $P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$

$$P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \subseteq P_n(\mathcal{K})$ sind Stammpolynome. $\mathcal{B}$ ist ein EZS und linear unabhängig.

3.3 Basen

Definition 3.21. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$ eines VR-V über $\mathbb{K}$ heißt *Basis von V*, falls $\mathcal{B}$ ein EZS und linear unabhängig ist.

Bemerkung 3.22. Eine Basis ist ein minimales EZS und ein maximales linear unabhängiges System.

Beispiel 3.23. $V = \mathbb{K}^n,\ \mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Beispiel 3.24. $V = P(\mathbb{K}) : \mathcal{B} = 1, x, x^2, \dots, x^n$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{C} \qquad \mathcal{B} = \{1\}$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{R} \qquad \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{K} = \mathbb{Q} \qquad \mathcal{B} = ?$
$\mathcal{B} = \{\log 2, \log 3, \log 5, \dots\}$ ist ein EZS und somit linear unabhängig.

Beispiel 3.25. Anwendung: $(A \mid 0)$ = homogenes LGS, mxn über $\mathbb{K}$
Annahme: Die Matrix ist bereits in ZSF

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$1.Zeile = a_1$
$2.Zeile = a_2$
$\vdots$
letzte Zeile vor Nullzeilen $= a_r$
$r = rang(A),\ \pi_j = Pivotelemte,\ j_1, \dots, j_r = SprungstellenderTreppenfunktion$
1. Behauptung: Die ersten r Zeilen $a_1, \dots, a_r$ sind linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{K}^n$.
2. Behauptung: Die Pivotspalten $j_1, \dots, j_r$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^m$.

Anwenden: $a_1, \dots, a_m \in V = \mathbb{K}^n,\ U = Span(a_1, \dots, a_n)$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow ZeilenstufenformmitTreppenfunktion$$
Gesucht ist eine Basis.

Ende VL von 18.11.14
Nachtrag:

Lemma 3.26. *$\mathcal{E} \subseteq V$. Span($\mathcal{E}$) ist der kleinste ("kleinste obere Schranke") $UVRvonV$, der $\mathcal{E}$ enthält.*

Beweis. Alle UVR von V bilden einen "Verband- Menge X mit einer *Ordnungsrelation*.
D.h. wir haben:
zwischen je zwei $x_1, x_2 \in X$ kann eine Relation gelten $x_1 \leq x_2$ oder nicht. Es muss nicht Vergleichbarkeit herrschen. Es kann sein, dass weder $x_1 \leq x_2$ noch $x_2 \leq x_1$ gilt. □

Beispiel 3.27. $X = \mathbb{R}, x_1 \leq x_2$ mit der uns bekannten Bedeutung.
Hier:
$x_1 \leq x_2$ oder $x_2 \leq x_1$ oder beides ($\Rightarrow x_1 = x_2$)
Dies nennt man eine *totale* oder *lineare Ordnung*.

Beispiel 3.28. M = Menge, $\mathfrak{X} = Pot(M)$ = Potenzmenge = $\mathcal{P}$ = Menge aller Teilmengen von M.
$M = \{1, 2\}$
$\mathfrak{X} = \emptyset$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \emptyset \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \{1\} \arrow[dr] & & \{2\} \arrow[dl] \\ & \{1,2\} & \end{tikzcd} \qquad Ordnungsrelation: \; x_1 \leq x_2 \; :\Leftrightarrow \; x_1 \subseteq x_2$$

Beispiel 3.29. $\mathfrak{X} = \mathbb{N}, a \leq b \Leftrightarrow a$ ist Teiler von b.
Es müssen folgende Axiome gelten:

1. Reflexivität: $x \leq y$
2. Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq y \Rightarrow x \leq z$

Ein maximales Element in $\mathfrak{X}$ ist ein $x \in \mathfrak{X}$, sodass gilt: $x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$

Beispiel 3.30. $V = VR$ über $\mathbb{K}, \mathfrak{X}$ = Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V, Ordnungsrelation = Inklusion

Lemma 3.31. Zom'sches Lemma
garantiert ein maximales $\mathcal{B} \in \mathfrak{X}$. Es ist dann leicht zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist auch ein EZS.

Beweis. Angenommen, das ist nicht so. D.h. es gibt ein $UVRW$ mit $\mathcal{E} \subseteq W \subsetneq Span(\mathcal{E})$.
Dann gibt es ein $x \in Span(\mathcal{E})$ mit $x \notin W$, also gibt es geeignete $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{E}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.
Es ist aber:
alle $e_i \in W$
alle $\lambda e_i \in W$
ABER $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in W \Rightarrow$ Widerspruch! □

Beispiel 3.32. $Span(\mathcal{E})$ ist der Durchschnitt aller UVR, die $\mathcal{E}$ enthalten.

Beweis. Sei $U_\alpha(\alpha \in I)$: alle UVR in V mit $\mathcal{E} \subseteq U_\alpha$. Nach (1) und (2) ist $Span(\mathcal{E})$ ein solches U_α.
Also gilt: $\bigcup_{\infty} U_\alpha \subseteq Span(\mathcal{E})$.
Sei $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in Span(\mathcal{E})$ d.h. $e_i \in \bigcap_{\infty} U_\alpha$. □

Nachtrag:

Lemma 3.33. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis, $b_i \in \mathcal{B}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{\lambda \cdot b_i\})$ wieder eine Basis.*

Beweis. Aus Lemma 3.2 und Lemma 3.17. $\square$

Lemma 3.34. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis, $b_i, b_j \in \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b_i + b_j\}$ wieder eine Basis.*

Beweis. Aus Lemma 3.3 und Lemma 3.18. $\square$

Lemma 3.35. *Austauschsatz von Steinitz*
Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_i, \dots\}$ eine Basis von V und sei $b \in V$ mit einer Darstellung
$b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_i b_i + \dots + \beta_n b_n$ für $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ und etwa $\beta_i \neq 0$.
Dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b\}$ wieder eine Basis.

Beweis. Ist $v \in V$ dargestellt durch $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_i b_i + \dots + \lambda_n b_m$
o.B.d.A. nehmen an: $n = m$ (Ergänzung durch Nullterme, falls $n \neq m$)
Dann können wir schreiben:
$v = (\lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_i}{\beta_i}) b_1 + \dots + \hat{b_i} + \dots + (\lambda_n - \frac{\beta_n \lambda_i}{\beta_i}) b_n$
weil $b_i = -\frac{\beta_1}{\beta_i} b_1 - \dots - \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} bi - 1 - \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} bi + 1 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_i} b_n$
D.h. v ist auch darstellbar durch $\mathcal{B}'$. Ist $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_i b_i + \dots + \alpha_n b_n = 0$ eine Relation in $\mathcal{B}'$, so erhalten wir durch Einsetzten von b daraus eine Realtion in $\mathcal{B}$:
$(\alpha_1 - \alpha_i \beta_1) b_1 + \dots + \alpha_i \beta_i b_i + \dots + (\alpha_n - \alpha_i \beta_n) b_n = 0$
Weil $\mathcal{B}$ linear unabhängig, muss dies eine triviale Relation sein, also
$\alpha_1 - \alpha_i \beta_1 = 0$
$\vdots$
$\alpha_i \beta_i = 0 \qquad \Rightarrow \alpha_i = 0 \rightarrow$ Also $\alpha_k = 0$ auch für $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
$\vdots$
$\alpha_n - \alpha_i \beta_n = 0$
Deshalb ist $\mathcal{B}'$ linear unabhängig. $\square$

Satz 3.36. *Existenzsatz von Basen*
Jeder Vektorraum besitzt eine Basis

Bemerkung 3.37. Wir zeigen dies hier nur für endlich abzählbar erzeugte VR über $\mathbb{K}$, denn dafür genügt die gewöhnliche Induktion. Für VR. die überabzählbar erzeugt sind, braucht man "transfinite Induktion". Eine Variante ist das *Zorn'sche Lemma*, welches zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz äquivalent ist. (siehe Aufgabe 35)

Beweis. (Im endlichen oder abzählbaren Fall)
Wir wählen ein abzählbares EZS $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$. (Ist V endlich erzeugt, so läuft k nur bis zu diesem einen endlichen n.) Wir betrachten technisch (algorithmisch) $\mathcal{E}$ als eine geordnete Folge.
Wir setzten $\mathcal{E}_\prime := \emptyset$
$\mathcal{E}_k := \{e_1, \dots, e_k\}$ für $k = 1, \dots, (n), \dots$
Algorithmus (Basisauswahlverfahren)
$\mathcal{B} := \emptyset$
$$\mathcal{B}_k := \begin{cases} \mathcal{B}_{k-1} & \text{falls } b_k \in Span(\mathcal{B}_{k-1}) \\ \mathcal{B}_{k-1} \cup b_k & \text{falls } b_k \notin Span(\mathcal{B}_{k-1}) \end{cases}$$
(Falls V endlich erzeugt wird, so läuft k nur bis n.)

1. $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_{k-1}$ - nach Konstruktion
2. $Span(\mathcal{B}_k) = Span(\mathcal{E}_k)$ - nach Konstruktion und Induktion

3. $\mathcal{B}_k$ ist linear unabhängig - nach Induktion, mit Lemma 3.19.

   Wir setzten $\mathcal{B} = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=0}^{n} & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist} \\ \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} & \text{falls } V \text{ abzählbar unendlich ist} \end{cases}$

4. $\mathcal{B}$ ist ein EZS:
   Ist $v \in V$ durch die ersten $k : e_1, \ldots, e_k$ darstellbar, also $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$, so ist $v \in Span(\mathcal{E}_k) =_2 Span(\mathcal{B}_k) \subseteq_1 Span(\mathcal{B})$

5. $\mathcal{B}$ ist linear unabhngig.
   Gibt es eine Relation zwischen (endlich vielen) Elementen in $\mathcal{B}$, so liegen diese bereits in einem $\mathcal{B}_N$, weil es nur endlich viele sind.

   $$\begin{matrix} e_1 \in \mathcal{B}_{k_1} \\ e_2 \in \mathcal{B}_{k_2} \\ \vdots \\ e_l \in \mathcal{B}_{k_l} \end{matrix} \qquad \Rightarrow e_1, \ldots, e_l \in \mathcal{B}_N, \; N = max\{k_1, \ldots, k_n\}$$

   Aber nach 3) ist $\mathcal{B}_N$ linear unabhängig.

$\square$

Bemerkung:
Das Basisauswahlverfahren (BAV) aus dem Basisexistenzsatz ist im wesentlichen ein Algorithmus:

EINGABE: Geordnetes EZS $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ (endlich oder abzählbar)

ABFRAGE: Ist $e_{k+1} \in Span(\{e_1, ..., e_k\})$?
Wenn nein füge Ihn zur Basis hinzu.
Wenn ja füge es nicht zur Basis hinzu und betrachte e_{k+2}

AUSGABE: Geordnete Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

Beispiele:
1) $V = Pol(\mathbb{R})$ (Die Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow mathbbR$).
Wähle als EZS die Stammpolynome $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$.
Behauptung: $X^{n+1} \notin Span(1, ..., X^n)$ (Dies ist für Plynome trivial aber noch lange nicht für Polynomfunktionen!)
Um dies zu zeigen nutzen wir einen Trick der universal einsetzbar ist:
Gäbe es eine Linearkombination, so dass

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \tag{3.1}$$

so könnte man (1) n-mal differenzieren (bei Polynomfunktionen wendet man formales Differenzieren an) und erhält

$$(n+1)!X = a_n n! \tag{3.2}$$

Damit wäre aber bereits, wenn X=0 in (2) eingesetz wird

$$0 = a_n n! \Rightarrow a_n = 0 \tag{3.3}$$

setzt man nun (3) in (1) ein und iteriert das Verfahren, erhält man, dass alle $a_i = 0$ sind, womit aber $X^{n+1} = 0$ wäre, was definitiv nicht der Fall ist.

2) Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{e^{a_k x} | k \in \mathbb{N} \ und \ a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

3) Wiederum Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{sin(a_k x) | k \in \mathbb{N} \ und \ a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig ist.

4) Sei V der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit 0=f(0)=f(1)

So ist $\mathcal{B} = \{Z_\xi \mid Z_\xi(x) : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R};\ Z_\xi = \begin{cases} \frac{x}{\xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{x-1}{\xi - 1} & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} ; \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Basis.

Es ist sehr selten, dass eine überabzählbare Basis explizit angegeben werden kann, da es im Allgemeinen sehr schwer ist mit überabzählbarer Dimension (siehe Abschnitt 3.4) zu arbeiten. So ist für $C^\infty(\mathbb{R})$ keine Hamel-Basis bekannt.

Satz 3.38 (Basisergänzungssatz)**.** *Sei V ein endlich oder abzählbar erzeugter K-Vektorraum. So kann jede linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq V$ zu einer Basis ergänzt werden.*

Beweis. Wähle ein beliebiges geordnetes Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$, welches nach dem Basisexistenzsatz definitiv existiert und wegen Abzählbarkeit auch geordnet werden kann.
So ist offensichtlich $\mathcal{E}' = \{b_1, ..., b_n, e_1, ..., e_n, ...\}$ erneut ein Erzeugendensystem. Wird nun BAV auf $\mathcal{E}'$ angewandt, so werden die b_i zuerst betrachtet und wegen linearer Unabhängigkeit als Basisvektoren gewählt. Somit gilt für die letztendliche Basis $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. □

Beispiele:(BAV)
1)$V = K^n;\ \mathcal{E} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, ..., e_1 + e_2 + ... + e_n\}$
$\mathcal{B}' = \{2e_2\} \longmapsto \mathcal{B} = \{2e_2, e_1, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, ...\}$

2)$V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R};\ K = \mathbb{Q};\ \mathcal{E} = \{2, 2\sqrt{2}\}$
$\mathcal{B}'_1 = \{1 + \sqrt{2}\} \longmapsto \mathcal{B}_1 = \{1 + \sqrt{2}, 2\}$
$\mathcal{B}'_2 = \{3\} \longmapsto \mathcal{B}_2 = \{3, 2\sqrt{2}\}$

3.4 Dimension

Unser Ziel wird es sein die Dimension eines Vektorraumes durch die Kardinalität einer Basis des Vektorraumes zu definieren.
Doch dafür müssen wir uns zunächst überzeugen, dass solch ein Dimensionsbegriff wohldefiniert ist. Nach dem Basisexistenzsatz besitzt jeder Vektorraum zumindest eine Basis, dies bereitet uns also keine Probleme. Allerdings haben wir in den Übungen eingesehen, dass ein Vektorraum sehr viele Basen besitzt.
Zwar hat $\mathbb{F}_2$ genau eine Basis, dieser ist aber auch der einzige neben dem trivialen Nullvektorraum mit nur einer Basis. So besitzt $\mathbb{F}_3$ zwei Basen, $(\mathbb{F}_2)^2$ hat drei Basen und $(\mathbb{F}_7)^3$ besitzt bereits 5.630.688 Basen.
Noch deutlicher wird das Problem im $\mathbb{R}^d$. Denn nach dem Basisergenzungsatz kann man eine Basis konstruieren, indem man zunächst einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor wählt, und daraufhin immer wieder von den vorher gewählten linear unabhängige Vektoren hinzufügt. So ergibt sich für die Menge aller geordneten Basen des $\mathbb{R}^d$ folgende Darstellung $\prod_{k=1}^{d-1}\{\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{R}^k\}$ Womit $\mathbb{R}^d$ sogar überabzählbar viele Basen besitzt.
Also stellt sich die Frage, ob alle Basen gleich mächtig sind.

Proposition 3.39. Sei V ein von n Vektoren (insbesondere endlich) erzeugter Vektorraum, dann sind n+1 Vektoren linear abhängig.

Beweis. Es sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ein Erzeugendensystem in V. So folgt die Behauptung induktiv:

Induktionsverankerung: Für n=0 ist $\mathcal{E} = \{\}$ womit $V = Span(\{\}) = 0$ ist.
Induktionsschritt: Seien $v_1, ..., v_n, v_{n+1} \in V$ beliebige aber verschiedene Vektoren. So besitzt jedes v_i folgende Darstellung:

$v_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} e_{i,j}$ mit $\omega_{i,j} \in K$

Zu Zeigen ist, dass eine nicht-triviale Relation $0 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$ existiert, also dass mindestens ein $\lambda_k \neq 0$ ist.
Betrachte λ_k als Unbekannte in einem wie folgt konstruierten LGS:

$Es\ gelte : 0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} e_{i,j}$
setze $\omega'_{i,j} := \omega_{j,i}$

Womit sich ein LGS des Ranges $r \leq n$ ergibt, also min. eine freie Variable λ_k enthält. Womit wiederum das LGS eine nichttriviale Lösung besitzt. □

Nun können wir folgenden gewünschten Satz formulieren:

Satz 3.40 (Dimensionssatz)**.** *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ sowie $\mathcal{B}' = \{b'_1, ..., b'_m\}$ zwei Basen in V, dann sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ schon gleich mächtig (bzw. n=m).*

Beweis. $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem in V mit n Vektoren. Nach Proposition 1 sind n+1 Vektoren linear Abhängig, womit $m \leq n$. Analog für $\mathcal{B}'$.
Somit ist n=m. □

Also können wir nun unseren angestrebten Dimensionsbegriff definieren:

Definition 3.41 (Dimension)**.** Sei $\mathcal{B}$ eine Basis in V, wobei V ein K-Vektorraum ist. So definiere:

$$dim_K(V) := |\mathcal{B}|$$

Als die Dimension von V.

Beispiele:
1) Sei K ein Körper so ist $dim_K(K^n) = n$

2) $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

3) Nach Übung sind $log(p_i)$ für beliebige Primzahlen p_i linear unabhängig in $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Also ist $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.
Dies ist zwar etwas informell, da es wie bereits erwähnt mehrere Arten der Unendlichkeit gibt. Es wird sich herausstellen, dass jene Dimension sogar überabzählbar ist.
Hier sieht man auch, dass unsere geometrische Vorstellung des Dimensionsbegriffes bei manchen Vektorräumen versagt, da R als Q-Vektorraum so zu sagen unendlich viele Richtungen besitzt, so stellt z.B. jedes $log(p_i)$ und jedes $\sqrt{a}$ für ein $a \neq n^2$ mit $a, n \in \mathbb{N}$ eine Richtung dar.

4) Sei K[X] ein Polynomring über K, so ist $dim_K(K[X]) = |\mathbb{N}|$ also abzählbar.
Denn wähle als Basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$.

5) Sei $\mathbb{A}$ der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen auf dem Intervall [0;1] mit f(0)=0 und

f(1)=0. So ist $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}) = |R|$ also überabzählbar.

6) Sei $\mathbb{E}$ der Untervektorraum des Vektorraumes der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ aufgespannt von e^{ax}. So ist $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}) = |\mathbb{R}|$ also auch überabzählbar.

Bemerkung:
Was wir in der linearen Algebra eine Basis nennen heißt im allgemeinen Hamel-Basis. Denn in anderen Gebieten der Mathematik treten andere Basisbegriffe auf. So arbeitet die Analysis oftmals in bzw. mit Räumen überabzählbarer Dimension, wie $C^{\infty}(\mathbb{R})$, wobei es für solche im allgemeinen sehr schwer ist eine Hamel-Basis anzugeben. Also betrachten Analytiker lediglich approximative Basen, die sogenannte Hilbert-Basis, bei der sich zwar nicht jedes Element des Vektorraumes als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt, wohl aber beliebig gut durch eine Linearkombination der Basisvektoren approximiert werden kann.
Beispiele sind Fourier-Reihen, welche glatte periodische Funktionen durch Überlagerungen von sin und cos approximieren. Und der Weierstraß'sche Approximationssatz garantiert, dass glatte Funktionen durch Polynomfunktionen approximiert werden können.

Für die Algebra reicht eine Hilbertbasis jedoch nicht aus!
Die folgende Propsition mag trivial erscheinen –und bei Vektorräumen ist sie es tatsächlich–, aber wenn man sich beispielsweise mit Gruppen beschäftigt, gilt die analoge Aussage nicht.

Proposition 3.42. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ eines endlich-erzeugten Vektorraums gilt immer $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von U, dann ergänze sie zu einer Basis $\mathcal{B}'$ von V, also $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Dann ist $\dim(U) = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| = \dim(V)$ □

Proposition 3.43. Es seien U', U'' Untervektorräume von V (V wieder endlich-erzeugt) mit $U := U' \cap U''$ und $\tilde{U} := U' + U''$. Dann gilt $\underbrace{\dim(\tilde{U})}_{n+m+k} = \underbrace{\dim(U')}_{k+n} + \underbrace{\dim}_{k+m}(U'') - \underbrace{\dim(U)}_{k}$.

Beweis. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ für U. Wir ergänzen einmal zu einer Basis $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ von U' und $\mathcal{B}'' \supset \mathcal{B}$ von U''. Außerdem setzen wir $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ Die Beziehungen sind im folgenden *kommutativen Diagramm* dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc} & U'' & \hookrightarrow & \tilde{U} & = U' + U'' \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ U' \cap U'' = & U & \hookrightarrow & U' & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \mathcal{B}'' & \subseteq & \tilde{\mathcal{B}} \\ & \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = & \mathcal{B} & \subseteq & \mathcal{B}' \end{array}$$

Behauptung: $\tilde{\mathcal{B}}$ ist eine Basis für U'. $\mathcal{B}'$ ist offensichtlich ein Erzeugendensystem für $\tilde{U}$. Betrachte die linear-unabhängige Menge $\mathcal{B}'$ und das Erzeugendensystem $\mathcal{E} := \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \{b_1', ..., b_{m-k}'\}$ von $\tilde{U}$ und wende das Basisauswahlverfahren an:
$b_1'' \notin \operatorname{span}(\mathcal{B}')$, also Fügen wir b_1' hinzu; $b_2'' \notin \operatorname{span}(\mathcal{B}' \cup \{b_1''\})$, wir fügen b_2' hinzu, und so weiter. Das heißt, das Basisauswahlverfahren liefert uns hier tatsächlich $\tilde{\mathcal{B}}$. □

Beispiel 3.44. 1. Seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ Körper. Sei $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$ eine Basis von $\mathbb{L}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist V ein $\mathbb{L}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_{\mathbb{L}} = \{b_1, ..., b_n\}$ (als $\mathbb{L}$-Vektorraum!), dann ist

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}} := \Lambda \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{K}} = \{\lambda_1 b_1, ..., \lambda_l b_1, \lambda_1 b_2, ..., \lambda_l b_2, ..., \lambda_1 b_n, ..., \lambda_l b_n\}$$

eine Basis von V als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Insbesondere gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}}_{l} \cdot \underbrace{\dim_{\mathbb{L}} V}_{n}$$

Konkret heißt das, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ betrachten: $\Lambda = \{1, i\}, l = 2$. Also: $\dim_\mathbb{R} V = 2 \cdot \dim_\mathbb{C} V$

2. Wir betrachten $V = \mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$- und als $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$\mathcal{B}_\mathbb{C} = \{e_1, ..., e_n\};\ e_k = (0, ..., 0, \underset{\boxed{k}}{1}, 0, ..., 0)$$

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n\};\ ie_k = (0, ..., 0, \underset{\boxed{k}}{i}, 0, ..., 0)$$

3. Wir betrachten $V = \mathbb{C}[X]$ der komplexen Polynome in X, wieder zunächst als Vektorraum über $\mathbb{C}$ und dann über $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_\mathbb{C} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\} \text{ Stammpolynome}$$

$$\mathcal{B}_R = \{1, i, X, iX, ..., X^n, iX^n, ...\}$$

Beispiel 3.45. es sei $\mathbb{L}$ ein *endlicher* Körper (etwa $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \ldots, \mathbb{F}_p$). Weil $\mathbb{L}$ endlich ist, muss $\mathrm{char}(\mathbb{L}) = p$ (p eine Primzahl) sein. Wie in Definition 2.11 setzen wir

$$\varepsilon_0 := 0, \varepsilon_1 := 1, \varepsilon_{n+1} := \varepsilon_n + 1$$

Also gilt $\varepsilon_p = 0$.
Behauptung: $\mathbb{K} := \{\varepsilon_0$, für $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{p-1}\}$ bilden einen Unterkörper, der isomorph ist zu $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$.
Zu zeigen: $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{L}, \underline{r} \mapsto \varepsilon_r,\ 0 \leq r < p$. Es gilt $-\varepsilon_k = \varepsilon_{p-k}, \varepsilon_n + \varepsilon_m = \varepsilon_{n+m}$. Das multiplikative Inverse ε_k^{-1} ist durch den euklidischen Algorithmus eindeutig bestimmt.
$\mathbb{L}$ hat als Vektorraum über $\mathbb{K}$ eine endliche Basis $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$. Da jedes $v \in \mathbb{L}$ genau eine Darstellung $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ hat, sind insgesamt p^n Elemente möglich: Für jeden der n Koeffizienten $\lambda_1 ... \lambda_n$ gibt es jeweils p Wahlmöglichkeiten, da $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Daraus folgt, dass

$$|\mathbb{L}| = p^n$$

Es gibt also insbesondere keinen Körper mit etwa sechs Elementen.

3.5 Prinzip der linearen Fortsetzung

Das Prinzip der linearen Fortsetzung besagt, dass eine lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis vollständig bestimmt ist. Dieser „Trick“ist hilfreich, da man statt unendlicher Systeme endliche Basen betrachten kann. Außerdem können wir die Werte auf einer Basis vorgeben, und dann wissen, dass es eine solche lineare Abbildung gibt.

Proposition 3.46. Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

(i) Für ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von V gilt: Sind $f, g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen und gilt $f(e) = g(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}$, dann gilt $f = g$ (d.h. $\forall v \in V : f(v) = g(v)$).

(ii) Für eine linear-unabhängige Menge $\mathcal{B}$ in V gilt: Ist $\varphi : \mathcal{B} \to W, b \mapsto \varphi(b)$ eine beliebige Funktion, so gibt es eine *lineare Fortsetzung* $f : V \to W$, das heißt eine lineare Abbildung f mit der Eigenschaft $f|_\mathcal{B} = \varphi$ (d.h. $f(b) = \varphi(b), b \in \mathcal{B}$).
Im kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] & W \\ \mathcal{B} \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

(iii) Aus (i) und (ii) folgt dann: Für eine Basis $\mathcal{B}$ von V gilt: Jede Funktion $\varphi : \mathcal{B} \to W$ besitzt geanu eine lineare Fortsetzung $f : V \to W$ (d.h. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$).

Korollar 3.47. Es gibt eine Bijektion zwischen den Funktionen von $\mathcal{B}$ nach V und den linearen Abbildungen von V nach W.

$$\begin{aligned} \mathrm{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} &\xrightarrow{\cong} \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(V, W) = \mathrm{Hom}_K(V, W) \\ \varphi &\longmapsto f \\ \varphi := f|_{\mathcal{B}} &\longleftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

Beweis. (i) Sei v dargestellt durch $\mathcal{E}$, etwa

$$v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

Dann rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)) \\ &= \lambda_1 \underbrace{f(e_1)}_{\shortparallel} + ... + \lambda_n \underbrace{f(e_n)}_{\shortparallel} \\ &= \lambda_1 \overbrace{g(e_1)} + ... + \lambda_n \overbrace{g(e_n)} \\ &= g(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) \\ &= g(v) \end{aligned}$$

(ii)Auf $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ seien Werte $w_i = \varphi(b_i)$ vorgegeben. wir ergänzen $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ von v:

$$\mathcal{B}' = \{b_1, ..., b_n, \underbrace{b'_1, ..., b'_m}_{\text{ergänzt}}\}$$

Wir schreiben $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n + \lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_m b'_m$. Wir wählen $w_{n+1}, ..., w_{n+m}$ beliebig in W (z.B. $= 0$). Dann definieren wir:

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n + \lambda'_1 w_{n+1} + ... + \lambda'_m w_{n+m}$$

Wir stellen fest:

1. Damit ist $f : V \to W$ für jedes v definiert, denn für jedes v gibt es eine Darstellung.
2. f ist wohldefiniert, weil die Darstellung von v eindeutig ist.
3. f ist linear.
4. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$ auf $\mathcal{B}$

$\square$

V Sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\mathcal{B} \subseteq V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] & W \\ \mathcal{B} \arrow[u, dashed, "\subseteq"] \arrow[ur, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

f ist linear, ϕ entspricht dann einer beliebigen Funktion.
$\mathrm{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathcal{B}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(V, W)$; $\phi \longleftrightarrow f$

1. $\mathcal{E}$ ist Erzeugendensystem
   $f, g : V \longrightarrow W$
   $f_{|\mathcal{E}} = g_{|\mathcal{E}} \implies f = g$

2. $\mathcal{B}$ ist linear-unabhängig $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists f : V \longrightarrow W$ linear $f_{|\mathcal{B}} = \phi$

3. $\mathcal{B}$ ist eine Basis $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists! f : V \longrightarrow W$ linear $f_{|\mathcal{B}} = \phi$

Beispiel 3.48. $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

3.6 Koordinaten

V ist endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$.
$\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ ist geordnete Basis.
Sei $V \ni v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ und $v = \lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_n b_n$, dann ist $\lambda_1 = \lambda'_1, ..., \lambda_n = lambda'_n$ (eindeutige Darstellung).

Definition 3.49. Falls $\mathcal{B}$ eine fest gewählte Basis ist, dann gibt es *Koordinaten* bzgl. $\mathcal{B}$. Definiert durch

$$K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

falls $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$.
$K^i_{\mathcal{B}}(v) = \lambda_i$ ist die i-te Koordinate.
$K_{\mathcal{B}}(v) = (K^1_{\mathcal{B}}(v), ..., K^n_{\mathcal{B}}(v))$

Satz 3.50. *$K_{\mathcal{B}}$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis.

1. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv:
   $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \longmapsto v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ Rückrichtung ist klar nach Konstruktion (siehe Definition).

2. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist linear:
   $K_{\mathcal{B}}(0) = (0, ..., 0) = 0$
   Seien $v, v' \in V$.
   Dann gilt $K_{\mathcal{B}}(v) + K_{\mathcal{B}}(v') = K_{\mathcal{B}}(v + v')$, denn$(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n) + (\lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_n b_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1) b_1 + ... + (\lambda_n + \lambda'_n) b_n$
   Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$. $K_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha K_{\mathcal{B}}(v)$, denn $\lambda_1 \alpha b_1 + ... + \lambda_n \alpha b_n = \alpha(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n)$

□

Beispiel 3.51.

1. Wenn $V = \mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ Standardbasis, dann ist $K_{\mathcal{B}}(v) = v$, also $K_{\mathcal{B}} = id$. Denn $v = (v_1, ..., v_n) = v_1 e_1 + ... + v_n e_n$.

2. Wenn $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = ((1, 0), (1, 1))$, dann ist $v = (1, 1) = 1b_1 + 1b_2 = 1(1, 0) + 1(1, 1)$

3. Wenn $V = P_n(\mathbb{K}) \widehat{=}$ Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$. Dann ist $p(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X_n$, $K_{\mathcal{B}} = (a_0, ..., a_n)$

Es stellt sich nun die Frage, was tun, wenn V nicht endlich erzeugt ist?

- wähle auch hier Basis $\mathcal{B}$
- was wäre auf der rechten Seite $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ oder $\mathbb{K}^{|\mathcal{B}|}$ $W^{\mathcal{B}}$ ist die Menge aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow W$
- $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ ist in der Tat zu groß für unsere Zwecke

Besser:Teilraum $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist frei von $\mathcal{B}$ erzeugter Vektorraum. $\mathbb{K}^{\mathcal{B}} \widehat{=}$ Menge aller Funktionen von $\mathcal{B}$ nach $\mathbb{K}$ ist das kartesische Produkt aller Faktoren $\mathbb{K}$, Indexmenge $\mathcal{B}$
$\Pi\mathbb{K}_b \widehat{=}$ alle mit $\mathcal{B}$ indizierten Familien $(\lambda_b \mid b \in \mathcal{B}) \longleftrightarrow \phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}; b \longmapsto \lambda_b$. Im Falle $\mathcal{B}$ abzählbar, so wäre dies dann die folge $(\lambda_1, \lambda_2, ...,)$
Unterraum $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $\phi(b) = 0$ fr̈ fast alle $b \in \mathcal{B}$, d.h. die Menge $\text{supp}(\phi) \widehat{=}$ Menge der Träger von $\phi = \{b \in \mathcal{B} \mid \phi(b) \neq 0\}$ endlich.
$\text{supp}(\alpha\phi) = \text{supp}(\phi), \alpha \neq 0$
$\text{supp}(\phi_1 + \phi_2) \leq \text{supp}(\phi_1) \cup \text{supp}(\phi_2)$
$\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist eine $\mathbb{K}-$VR.
Basis? Standardbasis?

Definition 3.52. Für jedes $b \in \mathcal{B}$ ist die *charakteristische Funktion* definiert durch:

$$\mathcal{X}_b : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$b' \longmapsto \delta_{bb'} = \begin{cases} 1, & b' = b, \\ 0, & b' \neq b. \end{cases}$$

$\phi \in \mathbb{K}(\mathcal{B})$
$\text{supp}(\phi) = \{b_1, ..., b_n\}$
$\phi = \phi(b_1)\mathcal{X}_{b_1} + ... + \phi(b_n)\mathcal{X}_{b_n}$ $X = \{\mathcal{X}_b \mid b \in \mathcal{B}\}$ ist ein Erzeugendensystem und linear-unabhängig
$\alpha_1\mathcal{X}_{\lfloor_\infty} + ... + \alpha_n\mathcal{X}_{b_n} = 0$
Einsetzen $b = b_1, b_2$, dann $\alpha_1\mathcal{X}_{b_1}(b_1) = 1$ $\mathcal{B} \longleftarrow X$
$b \longmapsto \mathcal{X}_b$
Dann $\mathcal{B} \widehat{=} X \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{B})$ und $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(\mathcal{B}) = |\mathcal{B}|$

Beispiel 3.53. $\mathcal{B} = \{1, ..., n\}$, $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \cong \mathbb{K}^n$; $e_i \longmapsto \mathcal{X}_i$
Koordinaten: $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K(\mathcal{B})$, $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ eine Darstellung durch gewisse $b_1, ..., b_n \in \mathcal{B}$.(das ist nicht abgezählt)
$v \mapsto \mathcal{X}_v = \lambda_1\mathcal{X}_{b_1} + ... + \lambda_n\mathcal{X}_{b_n}, \qquad \text{supp}(\mathcal{X}_v) \subseteq \{b_1, ..., b_n\}$
$\phi \longmapsto v' = \phi(b_1')b_1' + ... + \phi(b_m')b_m', \qquad \text{supp}(\phi) = \{b_1', ..., b_m'\}$

Satz 3.54. $\mathbb{K}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$ *ist ein Isomorphismus.*

A ist Menge, $\mathbb{K}(A)$ frei von A erzeugter $\mathbb{K}$-VR, $\phi : A \longrightarrow \mathbb{K}$, $\text{supp}(\phi)$ endlich, $\Psi \circ l_A = \Psi_{|A} = l_B \circ \psi$.

Ψ soll lineare Abbildung werden mit der Eigenschaft
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "l_A"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"] & \mathbb{K}(A) \arrow[d, "l_b \circ \psi"] \\ B \arrow[r, hook, "l_B"] & \mathbb{K}(B) = W \end{tikzcd}$$