

Coxeter-Gruppen

Freitags, 14:15 — 16:00 Uhr, Raum

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Vorstellung aller S1G1-Seminare: Montag, 19.1.2015, 8:15 — 9:30 Uhr, Gr.HS

Vorbesprechung mit Vortragsverteilung: Dienstag, 3.2.2015, 10:15 — 11:00 Uhr, Gr.HS

Coxeter-Gruppen sind Untergruppen der Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ aller reellen, invertierbaren $n \times n$ -Matrizen die von Spiegelungen

$$S_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad S_u(x) := x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

an der auf einem Vektor $u \in V$ senkrechtstehenden Hyperebene H_u erzeugt werden. Die einzelnen Spiegelungen S_u sind natürlich sehr einfache Abbildungen mit Ordnung 2. Das Produkt $R = S_u \circ S_v$ zweier Spiegelungen ist eine Rotation um eine auf u und v senkrechtstehenden Achse mit dem Drehwinkel 2α , wenn die beiden Vektoren u und v den Winkel α einschließen. Die Ordnung von R ist π/α , falls dies eine natürliche Zahl ist; und sonst ist Ordnung unendlich. Stehen u und v senkrecht aufeinander, so vertauschen S_u und S_v . Man sieht also einen ganz engen Zusammenhang zwischen der Geometrie der Vektoren u_1, u_2, \dots , bzw. ihrer Hyperebenen H_{u_1}, H_{u_2}, \dots und der Struktur der von den Spiegelungen S_{v_1}, S_{v_2}, \dots erzeugten Coxeter-Gruppe.

Beispiele für Coxeter-Gruppen sind:

- symmetrische Gruppen S_n ,
- Diedergruppen D_{2n} , d.h. Symmetriegruppen der regelmäßigen n -Ecke,
- Symmetriegruppen der fünf platonischen Körper.

Das Ziel des Seminars ist es, die Coxeter-Gruppen über die Geometrie und Kombinatorik dieser Spiegelungen zu studieren und am Ende eine Klassifikation der Gruppen zu erreichen.

Als Haupttext benutzen wir das Buch von Grove und Benson [G-B]. Parallel kann man auch das Buch von Humphreys [Hu] benutzen. Für einige Vorträge sind auch weitere Bücher notwendig oder nützlich. Alle Begriffe, Methoden und Sätze der Linearen Algebra I (sowie einige der Linearen Algebra II) werden wir voraussetzen; siehe auch die Zusammenstellung in [G-B, chap. 1].

Die Vorträge sind auf 90 Minuten angelegt: man bereite ca. 70 Minuten vor und stelle sich auf viele Zwischenfragen ein. Die Vorträge müssen mindestens 2 Wochen vor dem Vortragstermin fertig sein und mit mir durchgesprochen sein.

Vorträge

- (1) **Endliche Untergruppen der $O(2)$ und der $O(3)$**
Spiegelungen und Drehungen im \mathbb{R}^2 , die (endlichen) zyklischen Gruppen und die Diedergruppen als Symmetriegruppen der regelmässigen n -Ecke. Der Satz von Euler über Drehachsen im \mathbb{R}^3 .
[G-B, 2.1 - 2.3]
- (2) **Symmetriegruppen der Platonischen Körper**
Platonische Körper, ihre Symmetriegruppen. Kristallographische Gruppen.
[C, 10.1 + 10.3], [G-B, chap. 2.4 - 2.6]
- (3) **Fundamentaltbereiche von Gruppenoperationen**
Gruppenoperationen auf geometrischen Objekten, ihre Fundamentaltbereiche.
[G-B, chap. 3]
- (4) **Coxeter-Gruppen I**
Wurzelsysteme, Spiegelungen, Coxeter-Gruppen.
[G-B, 4.1] [Hu, chap. 1]
- (5) **Fundamentaltbereiche für Coxeter-Gruppen**
Konstruktion eines Fundamentaltbereichs. Beispiele: Platonische Körper.
[G-B, chap. 4.2]
- (6) **Coxeter-Gruppen II**
Coxeter-Graphen. Quadratische Form. Determinante der Form. Klassifikation der Coxeter-Graphen.
[G-B, chap. 5.1].
- (7) **Coxeter-Gruppen III**
Kristallographische Bedingung. Konstruktion der irreduziblen Coxeter-Gruppen.
[G-B, chap. 5.2 + 5.3].
- (8) **Coxeter-Gruppen IV**
Konstruktion einer irreduziblen Coxeter-Gruppe zu einem Coxeter-Graphen. Kristallographische Bedingung. Klassifikation der Coxeter-Gruppen.
[G-B, chap. 5.3].
- (9) **Coxeter-Gruppen V**
Ordnungen der irreduziblen, endlichen Coxeter-Gruppen.
[G-B, chap. 5.4].
- (10) **Präsentation der Coxeter-Gruppen I**
Präsentation einer Gruppe durch Erzeuger und Relationen. Beispiele. Länge von Wörtern, Satz von Iwahori.
[G-B, chap. 6], [B-B, chap. 1].
- (11) **Präsentation der Coxeter-Gruppen II**
Präsentation von Coxeter.
[G-B, chap. 6]
- (12) **Invariantentheorie der Coxeter-Gruppen**
Operation der $GL_n(\mathbb{R})$ auf Polynomen in n Variablen; Fixpunkte als Invarianten der Gruppe. Spurformel. Molien-Reihe. Satz von Sheppard-Todd.
[G-B, chap. 7]

- (13) **Lie-Gruppen, Weyl-Gruppen und Coxeter-Gruppen**
Coxeter-Gruppen und ihre Rolle bei der Klassifikation von Lie-Gruppen.
[He, Kap. I.4, IV.2]

LITERATUR

- [G-B] *L. C. Grove, C. T. Benson : Finite Reflection Groups,*
GTM 99, Springer-Verlag (1971, 1985).
- [C] *H. S. M. Coxeter : Introduction to Geometry,*
J. Wiley & Sons (1961, 1969).
- [Hu] *J. E. Humphreys : Reflection Groups and Coxeter Groups,*
Cambridge University Press (1990, 1994, 1997).
- [He] *W. Hein : Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen,*
Hochschutext, Springer-Verlag (1990).
- [B-B] *A. Björner, F. Brenti : Combinatorics of Coxeter Groups,*
GTM 231, Springer Verlag (2005).