Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer — Lineare Algebra I — WS 2014/15

Probeklausur

19. Dezember 2014

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Übungsgruppe (Nr. / Tutor) ____________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Summe	
Note	

Hinweis

- Bitte tragen Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors/Tutorin auf dem Deckblatt ein.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis neben Ihren Arbeitsplatz.
- Für jede der 10 Aufgaben gibt es max. 10 Punkte. (Ginge es um das Bestehen, so wären mindestens 50 Punkte zu erreichen; die Notenskala ist wie folgt: 4,0 ab 50, 3,7 ab 55, 3,3 ab 60, 3,0 ab 65, 2,7 ab 70, 2,3 ab 75, 2,0 ab 80, 1,7 ab 85, 1,3 ab 90, 1,0 ab 95 Punkte.)
- Sätze, Propositionen und Lemmata aus der Vorlesung benutzen Sie, ohne diese zu beweisen; aber deuten Sie dies an, etwa durch “nach dem Basisergänzungssatz” oder “nach einem Lemma der Vorlesung”. Dies gilt natürlich nicht, wenn die Aufgabe explizit fordert, einen aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Sachverhalt zu beweisen.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Handys sind auszuschalten.

Aufgabe 1.

(1) Gesucht ist der Schnittpunkt der Ebene $E : \frac{x_1}{3} + x_2 + \frac{x_3}{2} = 1$ mit der Gerade G durch den Nullpunkt und den Punkt $P = (1, 1, c)$ im $\mathbb{R}^3$. [6 Punkte]

(2) Für welche c hat die Gerade G keinen Schnittpunkt mit der Ebene E ? [4 Punkte]

Aufgabe 2.

Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 8x_1 & +10x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 6 \\ -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & = 5 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ mit dem Gauß-Algorithmus, finden Sie den Rang und schreiben Sie die Lösungsmenge in Parameterform.

[10 Punkte]

Aufgabe 3.

(1) Definieren Sie die Begriffe lineare Abbildung, [2 Punkte]

(2) Kern einer linearen Abbildung und [2 Punkte]

(3) Bild einer linearen Abbildung [2 Punkte]

(4) Zeigen Sie: Der Kern einer linearen Abbildung ist ein Unterraum. [4 Punkte]

Aufgabe 4.

Definieren Sie die Begriffe

(1) Erzeugendensystem eines Vektorraumes

(2) linear-unabhängige Teilmenge eines Vektoraumes

(3) Basis eines Vektorraumes

[4 bzw. 4 bzw. 2 Punkte]

Aufgabe 5.

(1) Wie lautet der Basisergänzungssatz ? [5 Punkte]

(2) Wie lautet der Basisaustauschsatz ? [5 Punkte]

Aufgabe 6.

(1) Definieren Sie den Begriff Rechtsinverses für eine Matrix. [2 Punkte]

(2) Beweisen Sie: $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ hat genau dann ein Rechtsinverses, wenn die Abbildung $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad T_A(x) = Ax$ surjektiv ist. [3 Punkte]

(3) Definieren Sie den Begriff Linksinverses für eine Matrix. [2 Punkte]

(4) Beweisen Sie: $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ hat genau dann ein Linksinverses, wenn die Abbildung $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad T_A(x) = Ax$ injektiv ist. [3 Punkte]

Aufgabe 7.

Wir betrachten den reellen Vektorraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I =]0, \infty]$.
Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \geq 0$ eine linear-unabhängige Menge bilden.
[10 Punkte]

Aufgabe 8.
Beantworten Sie ohne Begründung die folgenden Fragen mit Ja oder Nein:

(1) Ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein Körper ?
(2) Ist jede Teilmenge einer linear-unabhängigen Menge in einem Vektorraum linear-unabhängig ?
(3) Ist das Komplement eines Untervektorraumes immer ein Untervektorraum ?
(4) Ist das Inverse einer bijektiven linearen Abbildung wieder linear ?
(5) Es seien B_1 und B_2 sein linear-unabhängige Teilmengen in V mit n_1 bzw. n_2 Elementen und $n_1 + n_2 \leq \dim(V)$; ist dann $B_1 \cup B_2$ linear-unabhängig ?

[jeweils 2 Punkte]

Aufgabe 9.
Welche Dimension kann der Durchschnitt zweier Untervektorräume U_1 und U_2 eines Vektorraumes V in den folgenden Fällen haben ? (Kurze Begründung genügt.)

(1) $\dim(U_1) = 2$, $\dim(U_2) = 3$ und $\dim(V) = 6$ [4 Punkte]
(2) $\dim(U_1) = 3$, $\dim(U_2) = 4$ und $\dim(V) = 6$ [4 Punkte]
(3) $\dim(U_1) = 4$, $\dim(U_2) = 5$, $\dim(V) = 6$ und $U_1 + U_2 = V$ [2 Punkte]

Aufgabe 10.

(1) Beweisen Sie mit den Rechenregeln der Matrizenrechnung folgende Formel:
$$(A(\lambda C + \mu B))^\top = \lambda(AC)^\top + \mu(AB)^\top$$
für (m, k)-Matrizen A und (k, n)-Matrizen B, C über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$. (Geben Sie die Rechenregeln z.B. als 'Additivität des Transponierens' usw. an.) [6 Punkte]

(2) Folgern Sie, dass die Abbildung $f(X) = (AX)^\top$ linear ist. [4 Punkte]

Viel Glück !