

Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 9

Abgabetermin : Freitag, 19.6.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Felix Hausdorff in seinem Arbeitszimmer.

Aufgabe 41 (Potenzen einer Matrix, Cayley und Hamilton)

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix; man bestimme rekursiv folgende Polynome:

- (i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein je eigenes Polynom $p_k(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $\text{grad}(p_k) < n$ und $p_k(A) = A^k$.
- (ii) Ist A invertierbar, dann gibt es sogar für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein je eigenes Polynom $p_k(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $\text{grad}(p_k) < n$ und $p_k(A) = A^k$, insbesondere also auch für $k = -1$.
- (iii) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ das Polynom p_{-1} und A^{-1} , sowie p_4 und A^9 .

Aufgabe 42 (Die Algebra $\mathbb{K}[A]$)

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix über $\mathbb{K}$ und $\text{MP}_A(x) = m_0 + m_1x + \cdots + m_{d-1}x^{d-1} + x^d$ das Minimalpolynom, welches das Auswertungsideal $I_A \subseteq \mathbb{K}[x]$ erzeugt.

- (i) Es gibt einen Algebraisomorphismus

$$\varphi : \mathbb{K}[x]/I_A \longrightarrow \mathbb{K}[A], \quad \varphi(\underline{x}^k) = A^k.$$

Hier ist $\mathbb{K}[A]$ die von A erzeugte Unteralgebra in $\mathbb{M} = \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, also alle Linearkombinationen von Potenzen von A .

- (ii) $\mathfrak{A} = (1, A, \dots, A^{d-1})$ ist eine geordnete Basis von $\mathbb{K}[A]$.
 (iii) Es bezeichne $\mu_A : \mathbb{K}[A] \rightarrow \mathbb{K}[A]$ die Multiplikation mit A , also $\mu_A(B) = AB$.
 Man zeige: $AB = BA$ für jedes $B \in \mathbb{K}[A]$.
 (iv) Man berechne die Matrix $M = M_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}(\mu_A)$ von μ_A in der Basis $\mathfrak{A}$, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

Bemerkung: Will man die Multiplikationstabelle für $A^k \cdot A^l$ für alle $k, l \leq d-1$ hinschreiben, kann man das mit Hilfe der Polynome p_k aus dem ersten Teil von Aufgabe 41 tun.

Aufgabe 43 (Nilpotente Endomorphismen)

Man zeige:

- (i) Für einen nilpotenten Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V gibt es eine unvollständige Fahne $\mathfrak{F} = (F_0, \dots, F_d)$ mit $\varphi(F_{l+1}) \subseteq F_l$.
 (ii) Daraus folgt: es gibt eine Basis $\mathfrak{B}$ von V , so daß $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(\varphi)$ eine (echte) obere Dreiecksmatrix ist.
 (iii) Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{CP}_{\varphi}(t) &= (-1)^n t^n, n = \dim V, \\ \text{MP}_{\varphi}(t) &= t^m, m = \text{Nilpotenzindex von } \varphi, \\ \text{Det}(\varphi) &= 0, \\ \text{Spur}(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

- (iv) Für zwei vertauschbare nilpotente Endomorphismen $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ ist $\varphi + \psi$ und $\varphi \circ \psi$ nilpotent. Man folgere dies aus folgender Formel für Summe und Produkt zweier vertauschbarer Endomorphismen:

$$(\varphi + \psi)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi^k \circ \psi^{m-k}, \quad (1)$$

$$(\varphi \circ \psi)^m = \varphi^m \circ \psi^m. \quad (2)$$

Aufgabe 44 (Diagonalisierbare Matrizen liegen dicht)

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zeige man, daß die Menge $\mathfrak{D}_n$ der diagonalisierbaren Matrizen in $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ dicht liegt.

(Hinweis: Jedes $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ ist trigonalisierbar, also ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix T . Addiert man zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jeweils $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{C}$, so daß $\lambda_1 + \epsilon_1, \dots, \lambda_n + \epsilon_n$ nun alle verschieden sind, so ist $T_{\epsilon} = T + D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ zu $D(\lambda_1 + \epsilon_1, \dots, \lambda_n + \epsilon_n)$ ähnlich; beide Ähnlichkeiten sind Homöomorphismen der Form $A \mapsto \Omega A \Omega^{-1}$ für ein $\Omega \in GL_n(\mathbb{C})$.)

Daraus folgt: Sind $\Phi, \Psi : \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\Phi|_{\mathfrak{D}_n} = \Psi|_{\mathfrak{D}_n}$, so gilt sogar $\Phi = \Psi$.

Man stelle sich Φ und Ψ als linke bzw. rechte Seite einer Formel vor; etwas allgemeiner könnten

beide nur auf einer (offenen) Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ definiert sein (z.B. $\mathfrak{M} = GL_n(\mathbb{C})$) oder beide Funktionen nehmen Werte in einem Hausdorff^{1,2}-Raum ein.

***-Aufgabe 45** (Satz von Cayley-Hamilton)

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wollen wir mit dem Approximationsprinzip von Aufgabe 44 den Satz von Cayley-Hamilton beweisen.

Es sei $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) =: \mathbb{M}$, $\text{CP}_A(x) = \sum_{k=0}^n c_k(A)x^k$ das charakteristische Polynom. $\Phi(A) = \text{CP}_A(A) = \sum_{k=0}^n c_k(A)A^k$ sei durch Einsetzen von A entstanden und $\Phi_{ij}(A)$ sei der (i, j) -te Eintrag. Man Zeige:

- (i) $\Phi_{ij} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig ($1 \leq i, j \leq n$).
- (ii) Für eine Diagonalmatrix $D = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}(D) &= 0 & \text{für } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ \Phi_{ii}(D) &= \text{CP}_D(\lambda_i) = 0 & \text{für } 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

- (iii) $\Phi_{ij}(\Omega A \Omega^{-1}) = \Phi_{ij}(A)$ für alle $\Omega \in GL_n(\mathbb{C})$.

Unter einem topologischen¹ Raum verstehen wir eine Menge E , worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden

Umgebungsaxiome:

- (A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x ; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x .
- (B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x , so gibt es eine Umgebung W_x , die Teilmenge von beiden ist ($W_x \subseteq \mathfrak{D}(U_x, V_x)$).
- (C) Liegt der Punkt y in U_x , so gibt es eine Umgebung U_y , die Teilmenge von U_x ist ($U_y \subseteq U_x$).
- (D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt ($\mathfrak{D}(U_x, U_y) = \emptyset$).

Der Nachweis, daß die sphärischen Umgebungen in einem metrischen Raum diese Axiome erfüllen, ist sehr einfach; wir wollen ihn dennoch ausführen.

(A) Die Menge U_x der Punkte y , für die $\overline{xy} < \rho$, enthält jedenfalls den Punkt x . Sie braucht übrigens wirklich keinen weiteren Punkt zu enthalten (x kann ein „isolierter Punkt“ von E sein, § 3) und zwei Umgebungen mit verschiedenen Radien brauchen nicht verschieden zu sein.

(B) Von zwei Umgebungen mit verschiedenen Radien ist die mit kleinerem Radius Teilmenge der andern. In jedem Falle kann für W_x eine der beiden Mengen U_x, V_x selbst genommen werden.

¹ Der Ausdruck ist in einem verwandten Sinne bereits üblich; wir wollen damit andeuten, daß es sich um Dinge handelt, die ohne Maß und Zahl ausdrückbar sind.

(C) Hat U_x den Radius ρ und liegt y in U_x ($\overline{xy} < \rho$), so wähle man die positive Zahl $\sigma \leq \rho - \overline{xy}$. Die Umgebung U_y mit dem Radius σ ist dann in U_x enthalten, d. h. aus $\overline{yz} < \sigma$ folgt $\overline{xz} < \rho$, weil nach dem Dreiecksaxiom

$$\overline{xz} \leq \overline{xy} + \overline{yz} < \overline{xy} + \sigma \leq \rho.$$

Hierbei ist wesentlich, daß U_x durch $\overline{xy} < \rho$ (nicht $\leq \rho$), also z. B. im Fall der euklidischen Ebene als Kreisfläche ohne Peripherie definiert ist.

(D) Ist $x \neq y$, also $\overline{xy} > 0$, so wähle man die positive Zahl $\rho \leq \frac{1}{2}\overline{xy}$. Die Umgebungen U_x, U_y mit den Radien ρ haben dann keinen Punkt gemein, denn für einen solchen Punkt z wäre

$$\overline{xy} \leq \overline{xz} + \overline{yz} < 2\rho$$

im Widerspruch zur Wahl von ρ .

Damit ist die Behauptung bewiesen und ein metrischer Raum als spezieller topologischer Raum erkannt. Wir werden uns später mehrfach überzeugen, daß die Gültigkeit der Umgebungsaxiome keineswegs ein Privileg der sphärischen Umgebungen ist. Hier genüge ein Beispiel, das zugleich zeigt, wie man die geordneten Mengen nach demselben Formalismus wie die Punktmengen behandeln kann: ist E eine geordnete, der Einfachheit wegen offene Menge (d. h. ohne erstes und letztes Element), so verstehe man unter einer Umgebung von x jede das Element x enthaltende Mittelstrecke E_a^b , d. h. für $a < x < b$ die Menge der Elemente y , für die $a < y < b$. Diese Umgebungen erfüllen unsere Axiome, während sich Entfernungen im allgemeinen nicht definieren lassen.

Aus: F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 213f.

¹Felix Hausdorff (1868 - 1942), Mathematiker in Bonn.

²Endenicher Allee 60, Raum MZ 1.012.