Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 8 Abgabetermin : Freitag, 12.6.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

For a quartic polynomial

$$\begin{aligned}
&\Delta(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) \\
&= 256a_0^3a_4^3 - 27a_0^2a_3^4 - 27a_1^4a_4^2 + 16a_0a_2^3a_4 - 4a_0a_2^3a_3^2 - 4a_1^2a_2^3a_4 - 4a_1^3a_3^3 + a_1^2a_2^2a_3^2 \\
&\quad -192a_0^2a_1a_3a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 \\
&\quad -80a_0a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3^3 + 18a_1^3a_2a_3a_4. \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

For a quintic polynomial

$$\begin{aligned}
&\Delta(a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5) \\
&= 3125a_0^4a_5^4 - 2500a_0^3a_1a_4a_5^3 - 3750a_0^3a_2a_3a_5^3 + 2000a_0^3a_2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^3a_3^2a_4a_5^2 \\
&\quad -1600a_0^3a_3a_4^3a_5 + 256a_0^3a_4^5 + 2000a_0^2a_1^2a_3a_5^3 - 50a_0^2a_1^2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^2a_1a_2^2a_5^3 \\
&\quad -2050a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5^2 + 160a_0^2a_1a_2a_4^3a_5 - 900a_0^2a_1a_3^3a_5^2 + 1020a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5 \\
&\quad -192a_0^2a_1a_3a_4^4 - 900a_0^2a_2^3a_4a_5^2 + 825a_0^2a_2^2a_3^2a_5^2 + 560a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5 - 128a_0^2a_2^2a_4^4 \\
&\quad -630a_0^2a_2a_3^3a_4a_5 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4^3 + 108a_0^2a_3^5a_5 - 27a_0^2a_3^4a_4^2 - 1600a_0a_1^3a_2a_5^3 \\
&\quad +160a_0a_1^3a_3a_4a_5^2 - 36a_0a_1^3a_4^3a_5 + 1020a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2 + 560a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2 \\
&\quad -746a_0a_1^2a_2a_3a_4^2a_5 + 144a_0a_1^2a_2a_4^4 + 24a_0a_1^2a_3^3a_4a_5 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4^3 \\
&\quad +356a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4^3 - 630a_0a_1a_2^3a_3a_5^2 + 24a_0a_1a_2^3a_3^2a_5 \\
&\quad -72a_0a_1a_2a_3^4a_5 + 18a_0a_1a_2a_3^3a_4^2 + 108a_0a_2^5a_5^2 - 72a_0a_2^4a_3a_4a_5 + 16a_0a_2^4a_4^3 \\
&\quad +16a_0a_2^3a_3^3a_5 - 4a_0a_2^3a_3^2a_4^2 + 256a_1^5a_5^3 - 192a_1^4a_2a_4a_5^2 - 128a_1^4a_3^2a_5^2 \\
&\quad +144a_1^4a_3a_4^2a_5 - 27a_1^4a_4^4 + 144a_1^3a_2^2a_3a_5^2 - 6a_1^3a_2^2a_4^2a_5 - 80a_1^3a_2a_3^2a_4a_5 \\
&\quad +18a_1^3a_2a_3a_4^3 + 16a_1^3a_3^4a_5 - 4a_1^3a_3^3a_4^2 - 27a_1^2a_2^4a_5^2 + 18a_1^2a_2^3a_3a_4a_5 \\
&\quad -4a_1^2a_2^3a_4^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2. \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

Diskriminante für Polynome vom Grad 4 und 5, aus:
I.M.Gelfand, M.M.Kapranov, A.V.Zelevinsky:
Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, S. 405 + 406.

Aufgabe 36 (Division mit Rest für Polynome)

Es sei $f(x) = 2x^5 + x^3 + x + 1$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Man dividiere f durch g mit Rest über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 37 (Begleitmatrix eines Polynoms)

Es sei $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_{n-1}t^{n-1} + t^n$ ein normiertes ($p_n = 1$) Polynom über $\mathbb{K}$; die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -p_0 \\ 1 & 0 & & & & -p_1 \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -p_{n-2} \\ & & & & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

nennt man die *Begleitmatrix* zu $p(t)$.

(i) Man zeige:

$$\mathrm{CP}_M(t) = (-1)^n p(t). \tag{1}$$

Und wie folgt nun, dass jedes Polynom vom Grad n das charakteristische Polynom einer Matrix ist ?

(ii) Gilt $p(t) = \varphi(t)\psi(t)$ und $\mathrm{grad}(\varphi) = n_1, \mathrm{grad}(\psi) = n_2$, so gibt es eine $(n_1 \times n_1)$-Matrix A und eine $(n_2 \times n_2)$-Matrix B, so daß für $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ die Aussage (1) mit $n = n_1 + n_2$ gilt.

(iii) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gibt es sogar eine Diagonalmatrix M, so daß (1) gilt.

(iv) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gibt es eine Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_l \end{pmatrix}$$

mit 1×1-Matrizen $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_k)$ und 2×2-Matrizen $B_1, \ldots, B_l$, so daß (1) gilt, wobei $n = k + 2l$ ist.

Aufgabe 38 (Symmetrische Polynome)

Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ operiert durch Vertauschen der Variablen auf dem Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\sigma.f(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Ist $\sigma.f = f$, so heißt f *symmetrisch*; und $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ sei die Menge aller symmetrischen Polynome.

(i) $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ ist eine $\mathbb{K}$-Unteralgebra von $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

(ii) Die Polynome

$$E_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \ (k = 1, \ldots, n), \ E_0 := 1$$

heißen *elementar-symmetrische Polynome*; und die Polynome

$$P_k(x_1, \dots x_n) := x_1^k + \dots + x_n^k \ (k = 1, \dots, n), \ P_0 := 1$$

heißen *Potenzsummenpolynome.*

Man beweise die *Newton-Gleichungen*:

$$k\, E_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} P_i(x_1, \dots, x_n) E_{k-i}(x_1, \dots, x_n).$$

(iii) **Anwendung:** Man drücke für eine Diagonalmatrix D die Koeffizienten $c_k(D)$ des charakteristischen Polynoms $\mathrm{CP}_D(t)$ durch die Spuren $\mathrm{Spur}(D^k)$ der Potenzen aus.

Aufgabe 39 (Alternierende Polynome)

Man nennt ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *alternierend*, falls $\sigma.f = f$ gilt für alle $\sigma \in \mathfrak{A}_n$; anders gesagt: $\sigma.f = \mathrm{sign}(\sigma) f$, oder $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Ein Beispiel ist die Vandermonde'sche Determinante

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Für ein alternierendes f ist f^2 natürlich symmetrisch.

Man zeige:

Ist f alternierend, so ist f durch V_n teilbar und der Quotient

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$

ist symmetrisch.
(Hinweis: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Fassen Sie das Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ als Polynom in x_1 auf, dessen Koeffizienten Polynome in $x_2, \dots, x_n$ sind: $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_k f_k(x_1, \dots, x_n) x_1^k$, gemäß der Isomorphie $K[x_1, x_2, \dots, x_n] = (K[x_2, \dots, x_n])[x_1]$. Zeigen Sie jetzt, dass $x_2, \dots, x_n$ Nullstellen von f als Polynom in x_1 sind.)

***-Aufgabe 40** (Diskriminante)

Es bezeichne

$$D_n(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

das Quadrat des Vandermonde'schen Polynoms V_n. Für ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt

$$\Delta(f) := \mathrm{Res}(f, f')$$

die *Diskriminante* von f, wobei $f'(x) = a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n x^{n-1}$ die (formale) Ableitung bezeichnet.

(i) Für $n = 2$ und $f(x) = ax^2 + bx + c$ sowie $n = 3$ und $f(x) = ax^3 + bx + c$ (ohne quadratischen Term) berechne man die Diskriminante.

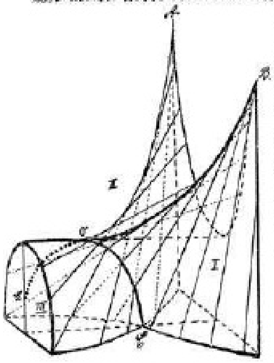
(ii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt: f hat genau dann eine mehrfache Nullstelle, wenn $\Delta(f) = 0$.

(iii) Für ein (normiertes) zerfallendes Polynom $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$ gelten:

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n+1)/2} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{2}$$

$$\Delta(f) = \prod_{i=1}^{n} f'(\lambda_i). \tag{3}$$

aber auch wirklich schön und brauchbar wird, daß es den ganzen interessierenden Verlauf der Fläche und ihrer Rückkehrkurve übersichtlich darstellt, wie wir es hier vor uns sehen, das ist nur durch längere Versuche und sehr große Geschicklichkeit erreichbar. Die nebenstehende Skizze stellt die Fläche mit ihren Geraden dar; $A\,C\,B$ ist die Rückkehrkurve (vgl. die Fig. S. 221).



Sie nehmen nun an dem Modell eine Doppelkurve ($C\,O$) wahr, längs deren sich zwei Mäntel der Fläche durchsetzen; das ist einfach die folgende Parabel der y-Ebene:

$$y = 0 \qquad z - \frac{x^2}{4} = 0.$$

Von dieser Parabel erscheint aber nur die eine Hälfte ($C\,O$), und zwar die für $x < 0$, als Durchdringung reeller Mäntel, während die andere isoliert im Raume verläuft. Diese Erscheinung ist keineswegs überraschend für den, der gewohnt ist, die Theorie der algebraischen Flächen mit konkreten geometrischen Vorstellungen zu begleiten; da ist es nämlich ganz geläufig, daß reelle Äste

The text shown here is from lectures by Felix Klein (1849–1925). The beautiful handwriting belongs to Ernst David Hellinger (1883–1950), who was asked to write down Klein's course while he worked in Göttingen as an assistant between 1907 and 1909. As Klein writes in the preface,

> Man wolle dabei von der Arbeit, die Herr Dr. Hellinger zu erledigen hatte, nicht gering denken. Denn es ist auch so noch ein weiter Weg von der durch allerlei zufällige Umstände bedingten mündlichen Darlegung des Dozenten zu der schriftlichen, hinterher noch wesentlich abgeglichenen, lesbaren Darstellung.

Aus: J. Top, E. Weitenberg: Resurfaced discriminant surfaces, in: EMS Newsletter March 2011, p.28-35.