Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 6 Abgabetermin : Freitag, 22.5.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Das Grabmal J. Plücker's auf dem Alten Friedhof in Bonn. Foto: © Jörg Bätz

---

Aufgabe 26 (Spektrum und Eigenräume)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Man bestimme über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ jeweils das charakteristische Polynom, das Spektrum und die Eigenräume von A.

Aufgabe 27 (Eigenwertgleichung $AX = \lambda X$ für Matrizen)

Die Linksmultiplikation mit der festen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ist eine lineare Abbildung

$$\Phi_A : V \longrightarrow V, \quad \Phi_A(X) = AX$$

für den Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$. Man zeige: $\mathrm{CP}_{\Phi_A}(t) = \mathrm{CP}_A(t)^n$.

Was folgt für die Eigenwerte von Φ_A ? Was sind die Eigenräume von Φ_A ?

Aufgabe 28 (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms)

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit dem charakteristischen Polynom

$$\mathrm{CP}_A(t) = c_0(A) + c_1(A)t + \cdots + c_{n-1}(A)t^{n-1} + (-1)^n t^n.$$

Die Minoren (= Unterdeterminanten) $\mathrm{Det}(A_{I,I})$ von A nennt man *Hauptminoren*. Wir setzen

$$\sigma_k(A) := \sum_{\substack{|I|=k \\ I \subseteq \{1,\ldots,n\}}} \mathrm{Det}(A_{I,I}), \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Offenbar ist $\sigma_1(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{Spur}(A)$ und $\sigma_n(A) = \mathrm{Det}(A)$. Man zeige:

$$c_{n-k}(A) = (-1)^{n-k}\sigma_k(A).$$

Aufgabe 29 (Verallgemeinerter Vertauschungssatz)

Es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix über $\mathbb{K}$. Man zeige für die $m \times m$-Matrix AB und die $n \times n$-Matrix BA:

$$(-1)^{n-m}t^n \mathrm{CP}_{AB}(t) = t^m \mathrm{CP}_{BA}(t).$$

Für zwei lineare Abbildungen $f : V \to W$ und $g : W \to V$ mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$ heißt das

$$(-1)^{n-m}t^n \mathrm{CP}_{f\circ g}(t) = t^m \mathrm{CP}_{g\circ f}(t).$$

Was bedeutet dies für zwei Spaltenvektoren $a, b \in \mathbb{K}^n$ und ihre Produkte $a^\top \cdot b = \langle a, b\rangle$ und $a \cdot b^\top = a \otimes b^\top$ (in der Notation von Aufgabe 19) ?

***-Aufgabe 30** (Plücker-Koordinaten II)

Wir haben in *-Aufgabe 21 einer Ebene $E = \mathrm{Span}(x, y)$ in $\mathbb{K}^n$ eine Gerade $\pi(E) := \mathrm{Span}(p(x, y))$ in $\mathbb{K}^N, N = \frac{n(n-1)}{2}$ mit den Plücker-Koordinaten $p(x, y)$ zugeordnet:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \boxed{?} \\
\cup & & \cup \\
V_2(\mathbb{K}^n) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & V_1(\mathbb{K}^N) = \mathbb{K}^N \setminus 0 \\
{\scriptstyle \mathrm{Span}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Span}} \\
Gr_2(\mathbb{K}^n) & \xrightarrow{\pi} & Gr_1(\mathbb{K}^N)
\end{array}$$

Hier ist $V_k(\mathbb{K}^n) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K} \,|\, x_1, \ldots, x_k \text{ linear unabhängig}\}$ die Stiefel[1]-Mannigfaltigkeit der k-Beine im $\mathbb{K}^n$, und $Gr_k(\mathbb{K}^n) = \{E \subseteq \mathbb{K}^n \,|\, E \text{ linearer Unterraum der Dimension } k\}$ die Graßmann[2]-Mannigfaltigkeit der k-Unterräume in $\mathbb{K}^n$; für $k = 1$ ist $Gr_1(\mathbb{K}^N) = \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{K})$ der $(N-1)$-dimensionale projektive Raum über $\mathbb{K}$. Es ist $\tilde{\pi} = p(x, y)$.

[1] E. Stiefel (1909 - 1978), Mathematiker in Zürich.
[2] H. Graßmann (1809 - 1877), Lehrer in Stettin.

Man zeige:

(i) π ist injektiv, d.h. sind für zwei Ebenen $E = \mathrm{Span}(x, y)$ und $E' = \mathrm{Span}(x', y')$ die Plücker-Koordinaten $p(x, y)$ und $p(x', y')$ linear abhängig, so ist $E = E'$.

Nun sei $n = 4$. Dann ist $N = 6$, und dim $Gr_2(\mathbb{K}^4) = 4$ und $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$ hat die Dimension 5.

(ii) Die 6 Plücker-Koordinaten $p_{ij}(x, y) = p_{ij}$ der Ebene $E = \mathrm{Span}(x, y)$ erfüllen die Gleichung

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{1}$$

(iii) Erfüllen umgekehrt die 6 Koordinaten eines Punktes $\zeta = (\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{23}, \zeta_{24}, \zeta_{34}) \in \mathbb{K}^6$ die Gleichung (1), so gibt es eine Ebene $E = \mathrm{Span}(x, y) \subseteq \mathbb{K}^4$ mit $p(x, y) = \zeta$.

(iv) Sind $E = \mathrm{Span}(x, y)$ und $E' = \mathrm{Span}(x', y')$ zwei Ebenen in $\mathbb{K}^4$ mit den Plücker-Koordinaten $p_{ij} = p_{ij}(x, y)$ bzw. $p'_{ij} = p_{ij}(x', y')$, so sind äquivalent:

(1) $E \cap E' \neq 0$,

(2) $\mathrm{Det}(x, x', y, y') = 0$,

(3) $p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{24} + p_{14}p'_{23} + p_{23}p'_{14} - p_{24}p'_{13} + p_{34}p'_{12} = 0$.

Was aber ist nun $\boxed{?}$ im obigen Diagramm ? - Es ist das äussere Produkt $\Lambda^2(\mathbb{K}^n)$ und $V_1(\mathbb{K}^N) = \Lambda^1(\mathbb{K}^n) \setminus 0$, und $\hat{\pi}(x, y) := x \wedge y$ in der Notation von *-Aufgabe 10.

Noch etwas: die linke Seite der Gleichung (1) ist die Pfaff'sche Determinante der schief-symmetrischen Matrix $P = (p_{i,j}(x, y))$, wo p_{ij} für alle $1 \leq i, j \leq n$ definiert wird. Zufall ?

Als er Anfang der 60er Jahre begann, sich der Übersetzung der fast 3 000 Jahre alten indischen Hymnen zuzuwenden, waren die Hilfsmittel, welche ihm zur Verfügung standen, noch sehr spärlich. Erst mit der Zeit flossen sie ihm reicher zu.[300]

Die mühselige Kleinarbeit, die Graßmann für sein Unternehmen auf sich nahm, und der außerordentliche Fleiß, der von ihm an den Tag gelegt wurde, verdienen unsere vollste Bewunderung. Ein ehemaliger Schüler Graßmanns weiß aus dieser Zeit zu berichten: „Freilich verging ihm auch, mit ausnahme bestimmter zeit, welche er seiner familie widmete, keine minute des tages ohne arbeit; unermüdlich fügte er stets in derselben klaren und schönen handschrift wort an wort, zal an zal in jenen unendlichen sammlungen, aus welchen wörterbuch und übersetzung des Veda hervorgegangen sind."[301]

Unermüdlicher Fleiß

„Niemals aber kam es vor, daß er Abends ausging, ein Glas Bier zu trinken; als daher 1863 die Deutsche Naturforscherversammlung in Stettin tagte, und er von Virchow aufgefordert wurde, mit in ein Bierrestaurant zu gehen, da wußte er keines."[302]

Nach zehnjähriger intensiver Arbeit, die fast seine ganze freie Zeit ausfüllte[303], konnte Graßmann 1872 das Manuskript seines „Wörterbuch[s] zum Rig-Veda" (H. Graßmann 1873–75) – erschienen in sechs Lieferungen von 1873 bis 1875 bei F. A. Brockhaus in Leipzig – abschließen.

Aus: H..-J. Petsche: Graßmann.