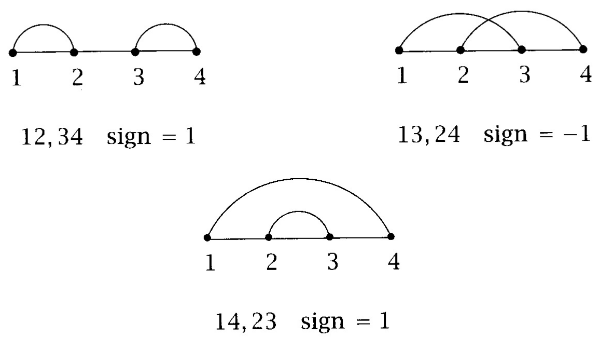
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 5 Abgabetermin : Freitag, 15.5.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Example. For $n = 4$ we have three matchings:



Aus: M. Aigner: A Course in Enumeration, 2007.

Aufgabe 21 (Plücker[1]-Koordinaten I)

Für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{K}^n$ betrachten wir die Unterdeterminanten

$$p_{ij}(x, y) := \mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = x_i y_j - x_j y_i \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Man zeige:

(i) x und y sind genau dann linear-abhängig, wenn $p_{ij}(x, y) = 0$ für alle i, j gilt.

(ii) Ist $x' = ax + cy,\ y' = bx + dy$ für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, so ist $p_{ij}(x', y') = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} p_{ij}(x, y)$ für alle i, j.

Durch lexikographische Anordnung der $N = \frac{n(n-1)}{2}$ Indexpaare (i, j) mit $i < j$ erhalten wir Koordinaten $p(x, y) = (p_{12}(x, y), p_{23}(x, y), \ldots, p_{n-1,n}(x, y)) \in \mathbb{K}^N$; diese heißen *(homogene) Plücker-Koordinaten* von $E = \mathrm{Span}(x, y)$.

---

[1] Julius Plücker (1801 - 1868), Mathematiker in Bonn.

Für diese gilt wegen (i) und (ii):

- $\dim \mathrm{Span}(x, y) = 2 \Leftrightarrow p(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Span}(p(x, y)) = 1$
- $\mathrm{Span}(x', y') = \mathrm{Span}(x, y) \Rightarrow \mathrm{Span}(p(x, y)) = \mathrm{Span}(p(x', y'))$

Aufgabe 22 (Unterdeterminante und Rang)

Es sei $f : V \to W$ vom Rang $\mathrm{rg}(f)$ und $n = \dim V, m = \dim W$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i) $p \leq \mathrm{rg}(f)$

(ii) Es gibt einen p-dimensionalen Unterraum V' in V und einen p-dimensionalen Quotientenraum $\overline{W}$ von W, so daß $\tilde{f} = \pi \circ f \circ \iota$ ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\pi"] \\ V' \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \overline{W} \end{tikzcd}$$

(Hier ist ι die 'kanonische' Inklusion $V' \subset V$ und π die 'kanonische' Projektion $W \to \overline{W}$.)

Aufgabe 23 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Man beweise folgende Aussagen:

(i) Ist v Eigenvektor des Endomorphismus f_1 zum Eigenwert λ_1 und des Endomorphismus f_2 zum Eigenwert λ_2, so ist v auch Eigenvektor von $g := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ zum Eigenwert $\lambda := \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$ (für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$).

(ii) Ist v Eigenwert des Endomorphismus $f : V \to V$ zum Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor von $g := \gamma_0 \mathrm{id}_V + \gamma_1 f + \gamma_2 f^2 + \cdots + \gamma_q f^q$ zum Eigenwert $\lambda := \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_q\lambda^q$ (für beliebige $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \mathbb{K}$).

(iii) Aber: Sei v_1 bzw. v_2 Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 und sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$; für welche $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ ist dann $w := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ ein Eigenvektor von f ?

Aufgabe 24 (Eigenwerte von Permutationsmatrizen)

Man bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte einer Permutationsmatrix $P_\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(Hinweis: Wenn $\mathrm{Typ}(\sigma) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ist, warum muß man sich die Aufgabe z.B. für $\mathrm{Typ}(\sigma) = (2, 0, 1, 1)$ nur für $\sigma = (1)(2)(345)(6789)$ überlegen ?)

***-Aufgabe 25** (Pfaff'sche[2] Determinante)

Unter einem Bogendiagramm μ auf der Indexmenge $I = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ versteht man eine disjunkte Zerlegung von I in n zwei-elementige Teilmengen $\{i_k, j_k\}, k = 1, \ldots, n$. Verlangt man $i_k < j_k$ und $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, so ist $\mu = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n))$ eine eindeutige Notation. $\mathbb{M}_n$ sei die Menge dieser Bogendiagramme.

Ist $i_k < i_l < j_k < j_l$, so zählen wir dies als Kreuzung; $K(\mu)$ sei die Anzahl dieser Kreuzungen und $(-1)^{K(\mu)}$ eine Art Signum.

[2] Johann Pfaff (1765 - 1825), Mathematiker; Helmstedt und Halle.

Nun sei $A = (a_{ij})$ eine schief-symmetrische $2n \times 2n$-Matrix über einen Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Wir wollen eine neue Determinante ('Halbdeterminante') definieren, die sogenannte *Pfaff'sche Determinante*:

$$\mathrm{Pf}(A) := \sum_{\mu \in \mathbb{M}_n} (-1)^{K(\mu)} \mathrm{pf}(\mu)$$

mit $\mathrm{pf}(\mu) := a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2} \cdots a_{i_n,j_n}$. Man beachte, daß wir hier nur n-fache Produkte bilden, im Gegensatz zur Leibniz-Formel der Determinante

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a(\sigma),$$

wo wir $2n$-fache Produkte $a(\sigma) = a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{2n,\sigma(2n)}$ bilden für eine $2n \times 2n$-Matrix.

Die Formeln

$$\mathrm{Pf}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{Pf}(A) \tag{1}$$

$$\mathrm{Pf}(A^\top) = (-1)^n \mathrm{Pf}(A) \tag{2}$$

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{Pf}(A)\mathrm{Pf}(B) \tag{3}$$

für eine $2n \times 2n$-Matrix A und eine $2m \times 2m$-Matrix B sind fast offensichtlich. Die Formel

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^\top & 0 \end{pmatrix} = (-1)^N \mathrm{Det}(C), \ N = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

für eine $n \times n$-Matrix C zeigt, daß die Determinante ein Spezialfall der Pfaff'schen Determinante ist. Ihre Bedeutung in Algebra und Topologie erhält die Pfaff'sche Determinante aus folgenden zwei Eigenschaften für schief-symmetrische Matrizen $A = -A^\top$:

$$\mathrm{Pf}(\Omega A \Omega^\top) = \mathrm{Det}(\Omega)\mathrm{Pf}(A), \ \Omega \text{ beliebig}, \tag{5}$$

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \mathrm{Det}(A). \tag{6}$$

Man beweise (6) wie folgt: Man zerlege $\mathfrak{S}_{2n} = \mathfrak{S}_{2n}^- \sqcup \mathfrak{S}_{2n}^+$ in solche Permutationen σ mit mindestens einem Zykel ungerader Länge und solche mit Zyklen ausschließlich gerader Länge. Ist $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l$ die Zykelzerlegung von $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^-$ und σ_1 der Zykel mit dem minimalen $i \in I$ unter den ungeraden Zykeln, so ist $\Phi(\sigma) = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_l$ eine Involution auf $\mathfrak{S}_{2n}^-$. Es ist $\Phi(\sigma) = \sigma$ genau dann, wenn $\sigma_1 = (i)$ die Länge eins hat; in diesem Fall ist $a(\sigma) = 0$, weil $a_{ii} = 0$ ist. In allen anderen Fällen ist $a(\Phi(\sigma)) = -a(\sigma)$ und $\mathrm{sign}(\Phi(\sigma)) = \mathrm{sign}(\sigma)$. Also heben sich die Terme mit $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^-$ in der Leibniz-Formel gegenseitig weg oder sind null.

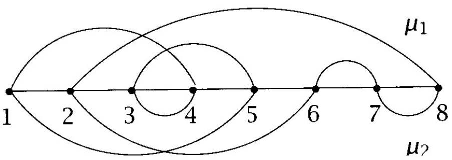
Für die Terme mit $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^+$ benutzt man, daß man sie durch ein Paar (μ_1, μ_2) von Bogendiagrammen beschreiben kann: siehe Bild. Es ist $\sigma = \hat{\mu}_2 \circ \hat{\mu}_1$, wenn man μ die Permutation $\hat{\mu} := (i_1\ j_1)(i_2\ j_2) \cdots (i_n\ j_n)$ zuweist. Ist $\Psi(\sigma) = (\mu_1, \mu_2)$ wie beschrieben, so ist $\Psi : \mathfrak{S}_{2n}^- \to \mathbb{M}_n \times \mathbb{M}_n$ eine Bijektion. Es ist $\mathrm{pf}(\mu_1)\mathrm{pf}(\mu_2) = \pm a(\sigma)$. Man muß nun noch die Vorzeichen $(-1)^{K(\mu_1)}, (-1)^{K(\mu_2)}$ und $\mathrm{sign}(\sigma)$ betrachten.

Beispiele:

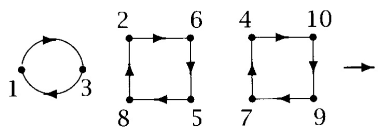
(1) $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b$

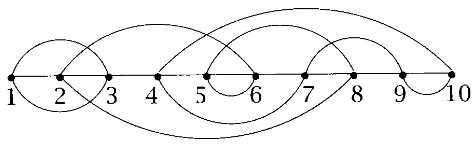
(2) $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{-12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{22} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$

Example. $\mu_1 = 14, 28, 35, 67$, $\mu_2 = 15, 26, 34, 78$.



The pair (μ_1, μ_2) decomposes $\{1, 2, \ldots, n\}$ into disjoint directed cycles of even length (these are the cycles of σ), where we choose the orientation in a cycle, starting at the smallest element in the direc-
Example. Given $\sigma = (1\,3)(2\,6\,5\,8)(4\,10\,9\,7)$ in E, then we have pictorially





and obtain $\mu_1 = 13, 26, 4\,10, 58, 79$, $\mu_2 = 13, 28, 47, 56, 9\,10$.
