Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 4 Abgabetermin : Freitag, 8.5.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

---

4. The process of computation, which I now proceed to explain, and for which "Condensation" appears to be an appropriate name, was communicated by me to the Royal Society in the year 1866, and an account of it is to be found in their "Proceedings," No. 84.

In the following remarks I shall use the phrase "interior of a Block" to denote the Block which remains when the first and last rows and columns are erased.

The process of "Condensation" is exhibited in the following rules, in which the given block is supposed to consist of n rows and n columns:—

(1) Arrange the given Block, if necessary, so that no ciphers occur in its interior. This may be done either by transposing rows or columns, or by adding to certain rows the several terms of other rows multiplied by certain multipliers.

(2) Compute the Determinant of every Minor consisting of four adjacent terms. These values will constitute a second Block, consisting of $\overline{n-1}$ rows and $\overline{n-1}$ columns.

(3) Condense this second Block in the same manner, dividing each term, when found, by the corresponding term in the interior of the first Block.

(4) Repeat this process as often as may be necessary (observing that in condensing any Block of the series, the r^{th} for example, the terms so found must be divided by the corresponding terms in the interior of the $\overline{r-1}^{\text{th}}$ Block), until the Block is condensed to a single term, which will be the required value.

As an instance of the foregoing rules, let us take the Block

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

By rule (2) this is condensed into $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; this, again, by rule (3), is condensed into $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; and this, by rule (4), into -4, which is the required value.

The simplest method of working this rule appears to be to arrange the series of Blocks one under another, as here exhibited; it will then be found very easy to pick out the divisors required in rules (3) and (4).

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-4.$$

Aus: Ch. L. Dodgson: Elementary Treatise on Determinants (1867).

Aufgabe 16 (Charakterisierung der Determinante)

Es sei $\Delta : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ ein Homomorphismus. Dann gibt es einen Homomorphismus $\psi : \mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}^\times$ mit $\Delta = \psi \circ \mathrm{Det}$, also $\Delta(A) = \psi(\mathrm{Det}(A))$ für alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(Hinweis: Man benutze die Formeln $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda+\mu) = E_{ii}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big)^{-1} E_{ij}(\mu) E_{ii}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big)$ für die Elementarmatrizen, um zunächst $\Delta(E_{ij}(\lambda)) = 1$ für $i \neq j$ zu zeigen; damit erhält man $\Delta(A) = \Delta(E_{11}(\delta))$ mit $\delta = \mathrm{Det}(A)$, also muß man $\psi(\nu) := \Delta(E_{11}(\nu))$ für alle $\nu \in \mathbb{K}^\times$ definieren.)

Aufgabe 17 (Charakterisierung der Spur)

Es sei $\Sigma : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\Sigma(AB) = \Sigma(BA)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$. Dann ist Σ ein Vielfaches der Spur, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{K}$ mit $\Sigma(A) = c \cdot \mathrm{Spur}(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.

(Hinweis: Man benutze die Formeln $\tilde{E}_{ij} = \tilde{E}_{ij}\tilde{E}_{jj}$, $\tilde{E}_{jj}\tilde{E}_{ij} = 0$ für $(i \neq j)$ und $\tilde{E}_{ii} = \tilde{E}_{i1}\tilde{E}_{1i}$, also $\tilde{E}_{11} = \tilde{E}_{1i}\tilde{E}_{i1}$ für die Standardbasismatrizen und folgere $\Sigma(A) = \Sigma(\tilde{E}_{ii})\,\mathrm{Spur}(A)$.)

Aufgabe 18 (Wegzusammenhang von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend, d.h. zu je zwei Matrizen $A_0, A_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine stetige Kurve $A : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A(0) = A_0$ und $A(1) = A_1$.

Aufgabe 19 (Tensorprodukt (oder Kronecker-Produkt) von Matrizen)

Für zwei Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{n',m'}(\mathbb{K})$ sei

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{mm',nn'}(\mathbb{K}).$$

(i) Mit den folgenden Rechenregeln wollen wir uns gar nicht lange aufhalten:

$$\begin{aligned} (A + A') \otimes B &= A \otimes B + A' \otimes B, \quad A \otimes (B + B') = A \otimes B + A \otimes B' \\ (\lambda A) \otimes B &= \lambda(A \otimes B) = A \otimes (\lambda B) \\ 0 \otimes B &= 0, \quad A \otimes 0 = 0 \\ A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C \\ (A \otimes B)^\top &= A^\top \otimes B^\top \\ (AA') \otimes (BB') &= (A \otimes B) \cdot (A' \otimes B'), \text{ insbesondere also} \\ (A \otimes B) &= (A \otimes \mathbb{1}) \cdot (\mathbb{1} \otimes B) \text{ und} \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1} \text{ für invertierbares } A \text{ und } B. \end{aligned}$$

(ii) Man zeige, daß i.A. $A \otimes B \neq B \otimes A$ gilt, indem man $\mathbb{1}_n \otimes C$ und $C \otimes \mathbb{1}_n$ für ein $C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ vergleiche. Aber es gibt eine Permutationsmatrix $P_{n,m}$, so daß

$$P_{n,m} \cdot (A \otimes B) \cdot P_{n,m}^{-1} = B \otimes A$$

für $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$ gilt.

(iii) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$. Man zeige:

$$\mathrm{Det}(A \otimes B) = \mathrm{Det}(A)^m \cdot \mathrm{Det}(B)^n \tag{1}$$
$$\mathrm{Spur}(A \otimes B) = \mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B) \tag{2}$$
$$\mathrm{rg}(A \otimes B) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B). \tag{3}$$

(iv) Das (Matrizen-) Produkt eines Zeilenvektors $x^\top = (x_1, \ldots, x_n)$ mit einem Spaltenvektor $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist das (Standard-)Skalarprodukt $x^\top \cdot y = \sum_i x_i y_i$. Hingegen ist das Produkt eines Spaltenvektors x mit einem Zeilenvektor $y^\top$ eine $n \times n$-Matrix

$$x \cdot y^\top = (x_i y_j)_{i,j}$$

und offensichtlich ist $x \cdot y^\top = x \otimes y$. Folgern Sie aus (3), daß alle $n \times n$-Matrizen vom Rang ≤ 1 von dieser Form $x \cdot y^\top = x \otimes y$ für zwei $x, y \in \mathbb{K}^n$ sind.

***-Aufgabe 20** (Determinante und Spur über Unterkörpern)

Ist $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ ein Unterkörper, so können wir jede Matrix über $\mathbb{L}$ als Matrix über $\mathbb{K}$ auffassen; wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \arrow[r, "\mathrm{Det}_{\mathbb{K}},\mathrm{Spur}_{\mathbb{K}}"] & \mathbb{K} \\
\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{L}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{Det}_{\mathbb{L}},\mathrm{Spur}_{\mathbb{L}}"] & \mathbb{L} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

also $\mathrm{Det}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Det}_{\mathbb{L}}(A)$ und $\mathrm{Spur}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Spur}_{\mathbb{L}}(A)$, wie man aus der Leibniz-Formel bzw. der Definition sofort folgern kann.

Wie ist es nun aber umgekehrt, wenn wir $\mathbb{K}$ als Vektorraum der Dimension d über $\mathbb{L}$ auffassen und die $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{K}$ zunächst als $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f = T_A$ auffassen und dann auch als $\mathbb{L}$-lineare Abbildunng $\tilde{f} = T_{A'}$ zu einer $dn \times dn$-Matrix A' über $\mathbb{L}$ auffassen: gilt dann auch $\mathrm{Det}_{\mathbb{K}}(f) = \mathrm{Det}_{\mathbb{L}}(f)$ und $\mathrm{Spur}_{\mathbb{K}}(f) = \mathrm{Spur}_{\mathbb{L}}(f)$?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f=T_A"] \arrow[d, "\beta\times\cdots\times\beta"', "\cong"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\cong"', "\beta\times\cdots\times\beta"] \\
\mathbb{L}^{dn} \arrow[r, "T_{A'}"] & \mathbb{L}^{dn}
\end{tikzcd}$$

Hier benutzen wir als Isomorphismus $\beta : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{L}^d$ von $\mathbb{L}$-Vektorräumen die Koordinatenfunktion $\beta = K_{\mathcal{B}} = (K^1_{\mathcal{B}}, \ldots, K^d_{\mathcal{B}})$ bzgl. einer $\mathbb{L}$-Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_d)$ von $\mathbb{K}$.

Wir betrachten hier den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{R}$. (Auch der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$ sei empfohlen.) Es sei wie üblich $\mathcal{B} = (1, i)$ unsere geordnete $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ und $\beta(z) = (x, y)$ ist die Aufspaltung in Realteil $x = \mathrm{Re}(z)$ und Imaginärteil $y = \mathrm{Im}(z)$ von $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Kurze Vorüberlegung zur Vergewisserung: Ist $n = 1$ und $A = (a)$, also $T_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Multiplikation mit $a = b + ic, (b, c \in \mathbb{R})$, so ist $A' = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}$. Es ist $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(A) = a = b + ic$, aber $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A') = b^2 + c^2 = |a|^2$. Und $\mathrm{Spur}(A) = a$, aber $\mathrm{Spur}(A') = 2b = 2\mathrm{Re}(\mathrm{Spur}(A))$.

Man zeige nun:

(i) Es ist

$$A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a_{11}) & -\mathrm{Im}(a_{11}) & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \mathrm{Im}(a_{11}) & \mathrm{Re}(a_{11}) & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

in der $\mathbb{L}$-Basis $\mathcal{B}' = (e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_n, ie_n)$ von $\mathbb{C}^n$. Und in der umgeordneten Basis $\mathcal{B}'' = (e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ hat es die Blockgestalt

$$A'' = M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{pmatrix}.$$

(ii) Man beweise:

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(f) = \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A') = \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}(A))^2 + \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(A))^2 = |\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(A)|^2 = |\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(f)|^2$$
$$\mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(f) = \mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(A') = 2\,\mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}(A)) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(A)) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(f)).$$

(Hinweis: Seien $\Lambda_{\mathrm{Re}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\Lambda_{\mathrm{Im}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so kann man A' und A'' durch das Tensorprodukt (aus Aufgabe 19) ausdrücken:

$$A' = \mathrm{Re}(A) \otimes \Lambda_{\mathrm{Re}} + \mathrm{Im}(A) \otimes \Lambda_{\mathrm{Im}}, \quad A'' = \Lambda_{\mathrm{Re}} \otimes \mathrm{Re}(A) + \Lambda_{\mathrm{Im}} \otimes \mathrm{Im}(A).$$

Denn Λ_{Re} ist die Multiplikation mit $1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in der Basis $\mathcal{B}$ und Λ_{Im} die Multiplikation mit $i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in der Basis $\mathcal{B}$.

[Unterhinweis auf die allgemeine Problemstellung (oder das Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{L} = \mathbb{Q}$): man schreibe (für $k = 1, \ldots, d$) die Multiplikation mit $b_k : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ als $d \times d$-Matrix Λ_k in der $\mathbb{L}$-Basis $\mathcal{B}$; dann ist

$$A' = B_1 \otimes \Lambda_1 + \cdots B_d \otimes \Lambda_d, \quad A'' = \Lambda_1 \otimes B_1 + \cdots \Lambda_d \otimes B_d,$$

wenn $B_k = (K^k_{\mathcal{B}}(a_{ij}))$ der k-Anteil von A ist.]

Für die Spur kann man die Formeln aus Aufgabe 19 benutzen; für die Determinante zerlege man A in ein Produkt von $\mathbb{K}$-Elementarmatrizen $E_{ij}(\lambda)$ und betrachte deren Real- und Imaginärteil.)

This process cannot be continued when ciphers occur in the interior of any one of the Blocks, since infinite values would be introduced by employing them as divisors. When they occur in the given Block itself, it may be re-arranged as has been already mentioned; but this cannot be done when they occur in any one of the derived Blocks; in such a case the given Block must be rearranged as circumstances require, and the operation commenced anew.

In the following instance it will be seen that in the first series of Blocks a cipher occurs in the interior of the third. We therefore abandon the process at that point and begin again, re-arranging the given Block by transferring the top row to the bottom; and the cipher, when it occurs, is now found in an exterior row. It will be observed that in each Block of the new series, there is only *one* new row to be computed; the other rows are simply copied from the work already done.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -30 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & 8 \\ -17 & 8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 18 & 40 \end{vmatrix}$$

36.

Ebenda.