Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 3 **ACHTUNG!** Abgabetermin: Donnerstag, 30.4.2015, 15:00-15:30 Uhr in N1.002.

COROLLARIES TO PROP. I.

1.

If, in a square Block, any row, or column, be selected: the Determinant of the Block may be resolved into terms, each consisting of one of the Elements of that row, or column, multiplied by the Determinant of its complemental Minor *.

---

* *Prop. I.* Thus the Determinant of the Block $\left\{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\}$ is $(ad-bc)$; and that of the Block $\left\{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{matrix}\right\}$ is $(aek-ahf-bdk+bgf+cdh-cge)$. Here the Determinantal coefficient of e is $(ak-cg)$, i. e. $\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix}$; and as e corresponds to the symbol $2\diagdown 2$, the numerals of which are *similar*, the sign of this Determinant ought to be $+$, and so we find it. Again, the Determinantal coefficient of f is $(-ah+bg)$, i. e. $-\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$; and as f corresponds to the symbol $2\diagdown 3$, the numerals of which are *dissimilar*, the sign of this Determinant ought to be $-$, and so we find it.

---

* *Prop. I. Cor.* 1. This gives us a simple method for computing the value of a Determinant arithmetically. Thus,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left\{5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\} - \&c. = 3\left\{35+2-15\right\} - \&c. = 3 \times 22 - \&c. = 66 - \&c.$$

Aus: Ch. L. Dodgson: Elementary Treatise on Determinants (1867).

Aufgabe 11 (Blockmatrizen)

(i) Beweisen Sie mit der Leibniz-Formel

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D)$$

für eine $n \times n$-Matrix A und eine $m \times m$-Matrix D. Genauso beweist man

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D)$$

(ii) Durch Multiplikation mit der Permutationsmatrix $P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}$ folgt

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = (-1)^{nm} \cdot \operatorname{Det}(B)\operatorname{Det}(C)$$

für eine $m \times m$-Matrix B und eine $n \times n$-Matrix C.

(iii) Für eine invertierbare $n \times n$-Matrix A und eine $m \times m$-Matrix D erhält man duch Multiplikation

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathbb{1}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

wobei $S = D - CA^{-1}B$ das Schur-Komplement bzgl. A ist (vgl. *-Aufgabe 55 aus LA I). Man folgere:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(S).$$

Falls A und C vertauschbare $n \times n$-Matrizen sind, folgt

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{Det}(AD - CB),$$

was uns an die Determinante einer 2×2-Matrix erinnert.

Aufgabe 12 (Vandermonde'sche Determinante)

Für $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sei die Vandermonde'sche Matrix

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \vdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Man zeige:

$$\operatorname{Det}(V(x_0, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 13 (Bandmatrizen)

Es sei D_{n+1} die Determinante der Bandmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & c_{n-1} & a_n & b_n \\ & & & & c_n & a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Man beweise mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz die Rekursionsformel

$$D_{n+1} = a_{n+1}D_n - b_n c_n D_{n-1}.$$

Für $a_i = 1, b_i c_i = -1$ erhält man die Fibonacci-Reihe.

Aufgabe 14 (Cramer'sche Regel)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen, $b \in \mathbb{Z}^n$ habe ganzahlige Komponenten b_i und $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ sei ein Teiler von $b_1, b_2, \dots, b_n$. Man zeige, daß die Lösungen $x_1, \dots, x_n$ des LGS $Ax = b$ ganze Zahlen sind.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme x_1, x_2, x_3.

***-Aufgabe 15** (Ableitung der Determinante)

Die Einträge $a_{ij}(t)$ der $n \times n$-Matrix $A(t) = (a_{ij}(t))$ seien reelle, differenzierbare Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ und es bezeichne $a'_{ij}(t) = \frac{d}{dt} a_{ij}(t)$ deren Ableitung; und $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ sei die Matrix mit den Ableitungen als Einträgen. Es bezeichne $a_1(t), \dots, a_n(t)$ die Spalten von $A(t)$ und $a'_1(t), \dots, a'_n(t)$ die Spalten von $A'(t)$.

Für die Funktion $\varphi_A : I \to \mathbb{R}, \varphi_A(t) := \mathrm{Det}(A(t))$ zeige man:

(i) $\varphi_{\mathbb{1}} = 1$ für die konstante Matrizenfunktion $A(t) = \mathbb{1}$ und $\varphi_{AB} = \varphi_A \cdot \varphi_B,\ \varphi_{A^{-1}} = \frac{1}{\varphi_A}$.

(ii) φ_A ist differenzierbar und $\varphi'_{\mathbb{1}} = 0$ (konstant), $\varphi'_{AB} = \varphi'_A \varphi_B + \varphi_A \varphi'_B,\ (\varphi_{A^{-1}})' = -\frac{\varphi'_A}{\varphi_A^2}$.

(iii) An jeder Stelle gilt

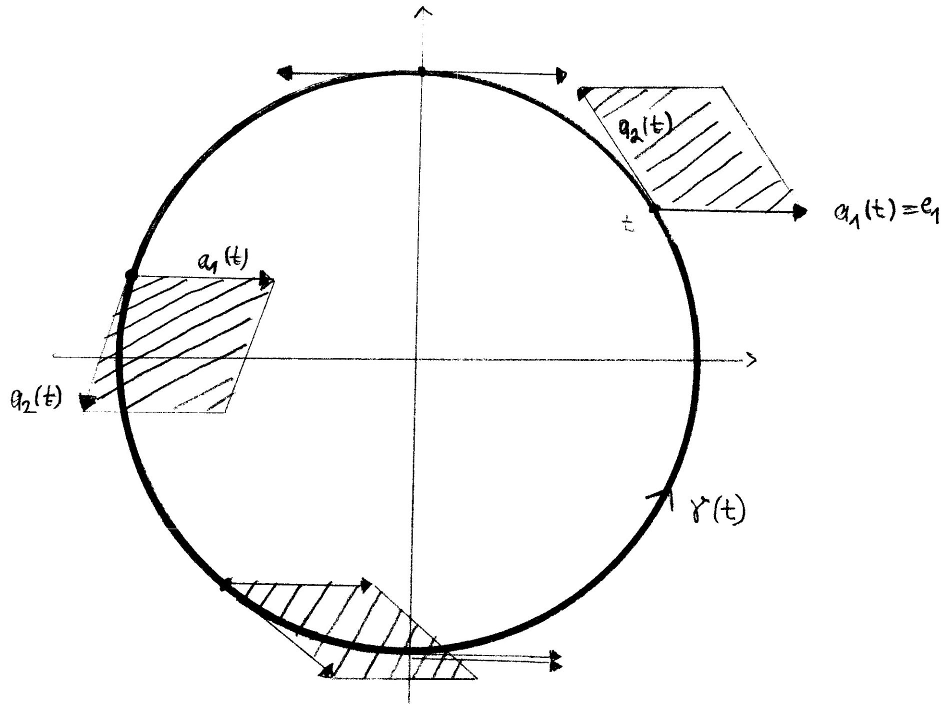
$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Det}(a_1(t), \dots, a_{k-1}(t), a'_k(t), a_{k+1}(t), \dots, a_n(t)).$$

(iv) Ist $A(t_0) = \mathbb{1}$, so gilt $\varphi'(t_0) = \mathrm{Spur}(A'(t_0))$. Ist $A(t_0)$ invertierbar, so gilt

$$\varphi'(t_0) = \mathrm{Spur}(A'(t_0) A(t_0)^{-1}) \mathrm{Det}(A(t_0)).$$

(v) **Beispiel:**

Es sei $\gamma(t) = e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ die Kreiskurve und man betrachte die Matrix $A(t) = (a_1(t), a_2(t))$, die vom konstanten Spaltenvektor $a_1(t) = e_1$ und vom Geschwindigkeitsvektor $a_2(t) = \dot{\gamma}(t)$ gebildet wird. Wo ist $A(t)$ nicht invertierbar ? Wo ist $A(t) = \mathbb{1}$? Man bestätige die Formeln in (iv). (siehe Skizze)



Skizze zu *-Aufgabe 15(v)

APPENDIX II.

Arithmetical Computation of Determinants.

A *general* method for computing the value of a Determinant has been already given (see Ch. II. Prop. I. Cor. 1. Note); and, when the Elements are *Algebraical*, this method is perhaps the best we can employ.

But when the Elements are *Arithmetical*, it is often possible so to re-arrange, or otherwise modify, the given Block, as to make the process of computation both easier and more expeditious. Were not this the case, it would seldom be worth while to employ Determinants for any purpose where actual calculation is necessary; for instance, in the solution of a set of 3 or more simultaneous Equations, the old method of elimination would be far preferable.

In this process of simplification, much must be left to the ingenuity of the student, guided by the circumstances of the case. A few general rules are all that the teacher can supply.

Ebenda.