Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 2 Abgabetermin : Freitag, 24.4.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

III. Die Determinante eines Quadrats von n^2 Elementen ist eine Form $n$ten Grades der Elemente, und heisst desshalb $n$ten Grades. Sie hat $n! = 1.2 \ldots n$ Glieder, welche zur Hälfte $\varepsilon = 1$, zur andern Hälfte $\varepsilon = -1$ haben (§. 1, 3), unter denen gleiche oder entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach Cauchy (und Jacobi) durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach Vandermonde durch Aufstellung der Reihe der ersten Nummern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Nummern, oder nach Cayley durch Einschliessung des Quadrats der Elemente zwischen Colonnenstriche*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\,a_{22}\,\ldots\,a_{nn} = \frac{1\ \ 2\,|\,\ldots\,|\,n}{1\ \ 2\,|\,\ldots\,|\,n} = \binom{1\ 2\ \ldots\ n}{1\ 2\ \ldots\ n}$$

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ -a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ +a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ -a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d \end{matrix}$$

Aus: R. Baltzer: Theorie und Anwendungen der Determinanten, 5. Auflage, 1881.

Aufgabe 6 (Determinanten von Inversen und Transponierten)

Man zeige (indem man die Matrix als Produkt von Elementarmatrizen schreibt):

(i) $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \mathrm{Det}(A)^{-1}$, falls A invertierbar.

(ii) $\mathrm{Det}(A^{\top}) = \mathrm{Det}(A)$.

Aufgabe 7 (Spur)

Beweisen Sie für die Spur $\mathrm{Spur}(A) = \sum_i a_{i,i}$ einer quadratischen Matrix $A = (a_i j)$ direkt aus dieser Definition:

(i) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(ii) Folgern Sie daraus für ein invertierbares Ω: $\mathrm{Spur}(\Omega A \Omega^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$.

(iii) Folgern Sie weiter: $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(CAB) = \mathrm{Spur}(BCA)$. Die Spur ist sogar unter beliebigen zyklischen Vertauschen invariant: $\mathrm{Spur}(ABC \cdots XYZ) = \mathrm{Spur}(ZABC \cdots XY)$.

Aufgabe 8 (Determinante und Signum)

Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ operiert durch Vertauschen der Spalten auf den Matrizen $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, d.h. wir setzen für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$\sigma \boldsymbol{.} A = \sigma \boldsymbol{.} (a_1, \dots, a_n) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Man zeige:

(i) $1 \boldsymbol{.} A = A$,
$\alpha \boldsymbol{.} (\beta \boldsymbol{.} A) = (\alpha\beta) \boldsymbol{.} A$

(ii) $\mathrm{Det}(\sigma \boldsymbol{.} A) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{Det}(A)$.

(iii) $\mathrm{Det}(P_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$.

Aufgabe 9 (Gitter in $\mathbb{R}^n$)

Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter (vom Rang n), d.h. eine (additive) Untergruppe von $\mathbb{R}^n$, erzeugt von n linear-unabhängigen Vektoren $b_1, \dots, b_n$, also

$$\Gamma = \{\mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n | \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir betrachten $G(\Gamma) := \{f \in GL(\mathbb{R}^n) | f(\Gamma) = \Gamma\}$.

Man zeige:

(i) $G(\Gamma)$ ist eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Matrix eines Endomorphismus $f \in G(\Gamma)$ hat in der Basis $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ geschrieben ganzzahlige Einträge, d.h. $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f) \in GL_n(\mathbb{Z})$.

(iii) $\mathrm{Det}(f) \in \mathbb{Z}$, und $\mathrm{Det}(f^{-1}) \in \mathbb{Z}$; also $\mathrm{Det}(f) = \pm 1$.

(iv)* $\mathrm{Spur}(f) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel: Ist $n = 2$ und $f = T_A, A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ eine Drehung um den Winkel θ, so kommen wegen $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$ nur welche Winkel θ in Frage, wenn ein Gitter invariant bleiben soll?

***-Aufgabe 10** (Äußere Potenzen $\Lambda^k(V)$)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ der Dimension n. Füe jedes $k = 1, 2 \dots$ sei $X^k := V^k$ nur als Menge und wir schreiben die Elemente nicht als k-Tupel $(v_1, \dots, v_n)$, sondern witzigerweise als Symbole $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. In dem von X^k frei erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorraum $K(X^k)$ betrachten wir den Untervektorraum A^k, welcher von Vektoren der Form

1) $v_1 \wedge \cdots \wedge (v_i + v_i') \wedge \cdots \wedge v_n - v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n - v_1 \wedge \cdots \wedge v_i' \wedge \cdots \wedge v_n$,

2) $\lambda(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n) - v_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda v_i) \wedge \cdots \wedge v_n$ für $\lambda \in \mathbb{K}$,

3) $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ mit $v_i = v_j$ für zwei $i \neq j$.

erzeugt wird. Wir setzen $\Lambda^k(V) := K(V^k)/A_k$ und nennen dies die *k-te äußere Potenz von V*. Für $k = 0$ setzen wir $\Lambda^0(V) := \mathbb{K}$. Es gibt eine offensichtliche multi-lineare Abbildung $\pi^k : V^k \to \Lambda^k(V), \pi^k(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

Man zeige:

(i) Λ^k ist ein Funktor von der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume in sich, d.h. für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ kann man eine lineare Abbildung $\Lambda^k(f) : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(W)$ definieren, so dass

$$\begin{aligned} \Lambda^k(\mathrm{id}_V) &= \mathrm{id}_{\Lambda^k(V)} \\ \Lambda^k(g \circ f) &= \Lambda^k(g) \circ \Lambda^k(f) \end{aligned}$$

gilt.

(ii) Die universelle Eigenschaft lautet:
Zu jeder multi-linearen Abbildung $f : V^k \to W$ in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum W mit der Eigenschaft $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$, falls $v_i = v_j$ für $i \neq j$ gilt, gibt es genau eine lineare Abbildung $F : \Lambda^k(V) \to W$ mit $f = F \circ \pi^k$.

(iii) Nun sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und wir betrachten diesmal nur den von B^k frei erzeugten Vektorraum, aus welchem wir den Unterraum A_k' erzeugt von den gleichen Relationen 1), 2) und 3) wie oben herausdividieren.

Finden Sie einen Isomorphismus

$$\phi_B : K(B^k)/A_k' \to \Lambda^k(V),$$

der offensichtlich von der Wahl der Basis abhängt.

(iv) Die Elemente $b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n$ bilden eine Basis von $\Lambda^k(V)$.

(v) Es folgt $\dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^k(V)) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Insbesondere ist $\Lambda^n(V)$ eindimensional und $\Lambda^k(V) = 0$ für $k > n$.

(vi) Für $V = K^n$ gibt es einen Isomorphismus $Alt_n(K^n) \to \Lambda^n(K^n), D \mapsto D(\mathbb{1})e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, wenn e_i die Standardbasisvektoren sind.

(vii) Etwas allgemeiner betrachten wir für einen Endomorphismus $f : V \to V$ den induzierten Endomorphismus $\Lambda^n(f) : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$. Da $\Lambda^n(V)$ 1-dimensional ist, ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ (ganz unabhängig von der Basis). Dann ist $\lambda = \mathrm{Det}(f) = \mathrm{Det}(M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f))$ für die Matrizendarstellung von f bzgl. irgendeiner Basis $\mathfrak{B}$.

*) Cauchy J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. Jacobi Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. Vandermonde Mém. sur l'élimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Cayley Cambridge math. J. 1841 t. 2 p. 267. Die Determinanten sind von Leibniz (l. c.) erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist Cramer (vergl. §. 1, 4) zu nennen. Die von Cauchy eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat Cauchy (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von Laplace (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

Ebenda.