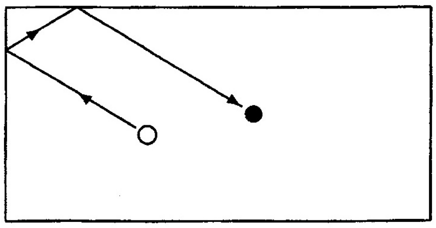
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 13 ohne Abgabe



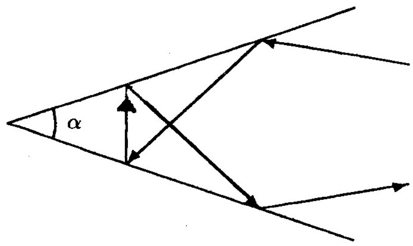


Fig. 6.3. Billiards, for Exercise 6.3. **Fig. 6.4.** For Exercise 6.4.

6.3. Two balls, white and black, are placed on a billiard table (Figure 6.3). The white ball must bounce off two cushions of the table and then strike the black one. Find its trajectory.

6.4. Prove that a ray of light reflecting from two mirrors forming a corner will eventually get out of the corner (Figure 6.4). If the angle formed by the mirrors is α, what is the maximal possible number of times the ray would bounce off the sides of the corner?

6.5. Two big floor-to-ceiling mirrors form the angle α. Inside the angle, a man holds a candle. How many reflections of the candle can the man see?

A.A. Borovik, A. Borovik: *Mirrors and Reflections. The Geometry of Finite Reflections Groups.* (Springer Verlag 2010)

Aufgabe 61 (Schwarz'sche Ungleichung im Komplexen)

Es sei σ ein hermite'sches Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V.

(i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in V$ gilt:

$$0 \leq \sigma(x,x) - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\sigma(x,y)) + |\lambda|^2\sigma(y,y). \tag{1}$$

(ii) Setzt man für ein $y \neq 0$ in (1) ein $\lambda = \sigma(x,y)/\sigma(y,y)$, so folgt:

$$|\sigma(x,y)| \leq \|x\|_\sigma \cdot \|y\|_\sigma \,.$$

Aufgabe 62 (Längentreue, Winkeltreue und Eigenwerte)

Für eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung $f : V \to V$ eines euklidischen bzw. unitären Vektorraums V zeige man:

(i) $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$,

(ii) $\angle(f(x), f(y)) = \angle(x, y)$ für orthogonales f,

(iii) $|\lambda| = 1$ für alle $\lambda \in \operatorname{Spek}(f)$,

(iv) $\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(f) \perp \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(f)$ für je zwei verschiedenen $\lambda_1, \lambda_2 \in \operatorname{Spek}(f)$.

Aufgabe 63 (Spiegelungen)

Für einen Unterraum $U \subseteq V$ eines euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt σ definiert man die Spiegelung an U durch

$$S_U : V \to V, \quad S_U(x) := x - 2P_{U^\perp}(x),$$

wobei $P_{U^\perp}$ die lotrechte Projektion auf das orthogonale Komplement $U^\perp$ ist. Man zeige für $S := S_U$:

(i) $S^2 = \mathrm{id}_V$, also $S^{-1} = S$.

(ii) $S(x) = x \iff x \in U = \operatorname{Fix}(S)$.

(iii) $S(x) = -x \iff x \in U^\perp$.

Sind $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume der Kodimension 1, so ist ein Winkel zwischen ihnen definiert durch

$$\omega = \angle(U_1, U_2) := \angle(r_1, r_2),$$

wenn $U_1^\perp = \operatorname{Span}(r_1)$ und $U_2^\perp = \operatorname{Span}(r_2)$ ist. (Dass dies nicht von der Wahl von r_1, r_2 abhängt, folgt aus der Gleichung $\angle(\lambda x, \mu y) = \angle(x, y)$ für alle $x, y \in V$ und $0 < \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.) Man zeige nun für $S_1 = S_{U_1}$, $S_2 = S_{U_2}$:

(iv) Ist $\omega = \pi/m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$(S_1 \circ S_2)^m = (S_2 \circ S_1)^m = \mathrm{id},$$

was man eine *Coxeter-Relation* nennt.

Aufgabe 64 (Indefinite Form auf $\mathbb{R}^2$ und der Tangens hyperbolicus)

Auf dem $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gegebene symmetrische, nicht-ausgeartete, aber indefinite Form

$$\sigma(x, y) = x^\top S y = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

und wollen $\operatorname{Aut}(V, \sigma)$ bestimmen.

(i) Bestimmen Sie zunächst die Niveaumengen

$$N(r) := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x, x) = r \right\}$$

für $r = 0, \pm 1$. Eine Zeichnung ist hilfreich.

(ii) Bestimmen Sie alle reellen Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $A^\top S A = S$.

(iiI) Folgern Sie, daß es die folgenden vier Scharen gibt

$$A = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a^2 - 1} \\ \pm\sqrt{a^2 - 1} & a \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a^2 - 1} \\ \mp\sqrt{a^2 - 1} & -a \end{pmatrix}$$

und daß je zwei $\operatorname{Det}(A) = +1$ bzw. $\operatorname{Det}(A) = -1$ haben; dabei zerfällt jede Schar in zwei Teile für $a \geq 1$ und $a \leq -1$.

(iv) Parametrisiert man die möglichen $a \geq +1$ und $a \leq -1$ durch $a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ mit $-1 < t < 1$ und setzt z.B. in der ersten Schar

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix},$$

so ist $A(s)A(t) = A\left(\frac{s+t}{1+st}\right)$.

(v) Dahinter steckt das Additionstheorem des Tangens hyperbolicus

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.$$

Anders gesagt, es ist

$$\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V, \sigma), \ \ t \longmapsto A(\tanh(t))$$

ein Homomorphismus von Gruppen. Eine solche Operation von $\mathbb{R}$ auf einem Raum nennt man einen *Fluß*.

(vi) Die Niveaumengen $N(r)$ sind ja invariant unter jedem $A \in \mathrm{Aut}(V, \sigma)$. Wie operiert $A(t)$ auf $N(r)$? Und was hat dies mit dem Gradientenfluß der Funktion $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ zu tun ?

***-Aufgabe 65** (Hamiltons Quaternionen und $SU(2)$)

Wir wollen den Zusammenhang zwischen der Gruppe $SU(2)$ und einer Divisionsalgebra, den Quaternionen, beschreiben.

(i) Zunächst identifizieren Sie die Menge aller komplexen Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $SU(2)$ mit der Menge aller 4-Tupel (a, b, c, d) mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, die den Gleichungen

$$|a|^2 + |c|^2 = 1, \quad b = -\overline{c}, \quad \text{und} \quad d = \overline{a}.$$

genügen. Damit erhält man die Bijektion

$$\psi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU(2), \ \ (a, b) \longmapsto A = \begin{pmatrix} a & -\overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

(ii) Daraus folgt, daß $\mathbb{S}^3$ eine (nicht-kommutative) Gruppe ist; und zwar wird sie sich als eine Gruppe von Einheiten einer $\mathbb{R}$-Algebra entpuppen.

Dazu sei $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}$-Algebra aufgefasst wie folgt: ein $x \in \mathbb{R}^4$ schreiben wir als $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, weil man die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 hier traditionell mit den Symbolen als $1, i, j, k$ schreibt. Eine Multiplikation ist nun allein durch die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} & i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ & i\,j = k, \quad j\,k = i, \quad k\,i = j \\ & j\,i = -k, \quad k\,j = -i, \quad i\,k = -j. \end{aligned}$$

festgelegt. Damit ist $\mathbb{R}^4$ eine 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{H}$ mit nicht kommutativem Produkt, die *Hamiltonschen Quaternionen*, geworden.

(1) Man bestimme die komplexen 2×2-Matrizen $\psi(1), \psi(i), \psi(j)$ und $\psi(k)$, die so genannten *Pauli-Matrizen*.

(2) Es gilt $|a\,b| = |a|\ |b|$ für je zwei $a, b \in \mathbb{H}$ für die Norm des hermitischen Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^2$.

(iii) Man zeige weiter:
(1) Jedes Element $a \neq 0$ ist invertierbar; also ist die Multiplikation mit a injektiv. (Deshalb nennt man $\mathbb{H}$ eine *Divisionsalgebra*.)
(2) $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ ist die Gruppe der Einheiten der Norm 1.

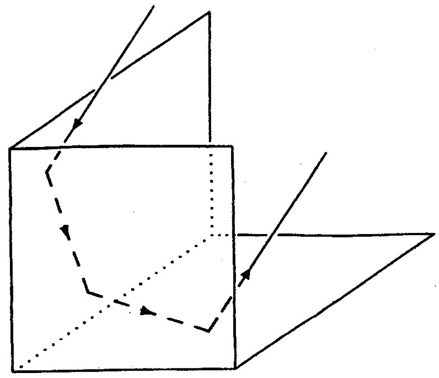


Fig. 6.5. Angular reflector (for Exercise 6.6).

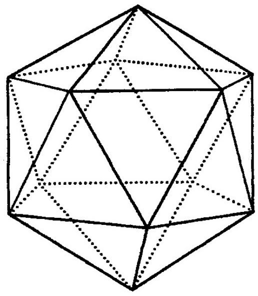


Fig. 6.6. Icosahedron.

6.6. Prove that the angular reflector made of three pairwise perpendicular mirrors in $\mathbb{R}^3$ sends a ray of light back in the direction exactly opposite to the one it came from (Figure 6.5).

6.7. How many mirrors of symmetry has a regular tetrahedron? A cube?

6.8. Figure 6.6 shows an icosahedron, one of the five *Platonic solids*. Assuming that it is as symmetric as it appears to be, count the number of its mirrors of symmetry.