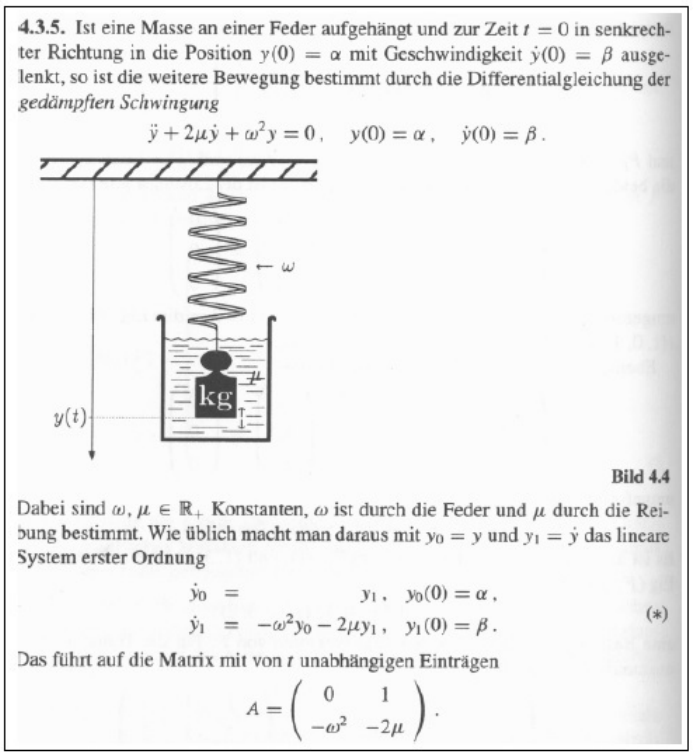
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 12 Abgabetermin : Freitag, 10.7.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



4.3.5. Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t = 0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0) = \alpha$ mit Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0\,, \quad y(0) = \alpha\,, \quad \dot{y}(0) = \beta\,.$$

Bild 4.4

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}_+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Wie üblich macht man daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= y_1\,, \quad y_0(0) = \alpha\,, \\ \dot{y}_1 &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1\,, \quad y_1(0) = \beta\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

Das führt auf die Matrix mit von t unabhängigen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}.$$

Skizze zur gedämpften Schwingung.
aus: G. Fischer: Lineare Algebra, S. 238.

Aufgabe 56 (Orthogonale Komplemente)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit einem Skalarprodukt und $U, W \subset V$ seien Unterräume. Zeigen Sie:

(i) $(U^\perp)^\perp = U$

(ii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Aufgabe 57 (Orthogonalprojektion)

Es sei V ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $W \subset V$. Es sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Orthonormalbasis von W. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$P : V \to V, \quad P(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, x \rangle\, w_i.$$

Man zeige, daß P die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $P^2 = P$, $\mathrm{im}(P) = W$ und $\ker(P) = W^\perp$.

(ii) P hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis von W ab.

(iii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$, d.h. P ist *selbstadjungiert*.

(iv) Ist $x \in V$, so ist $P(x)$ derjenige Vektor in W, mit dem kleinsten Abstand zu x: ist v inW mit $|v - x| \leq |P(x) - x|$, so ist $v = Px$.
(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, daß $v - P(x)$ und $x - P(x)$ zueinander orthogonal sind.)

Aufgabe 58 (Beispiel für Gram-Schmidt'sches Verfahren)

Es sei $V \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Bekanntlich ist $\sigma(f, g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf V. Man wende das Gram-Schmidt'sche Verfahren auf die Basis $(1, x, x^2, x^3)$ von V an.

Aufgabe 59 (Zerlegung invertierbarer Matrizen)

Es sei $\Delta_n \subset \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen $A = (a_{ij})$ mit positiven Diagonaleinträgen, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Ferner sei $O(n) \subset \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller orthogonalen Matrizen, d.h. aller Matrizen A mit $A^\top A = \mathbb{1}$. Zeigen Sie:

(i) Δ_n und $O(n)$ sind Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$.

(ii) Die Multiplikation $\mu : \Delta_n \times O(n) \to GL_n(\mathbb{R}), (D, A) \mapsto DA$ ist injektiv.
(Hinweis: Äquivalent ist die Aussage $\Delta_n \cap O(n) = \mathbb{1}$.)

(iii) Die Multiplikation $\mu : \Delta_n \times O(n) \to GL_n(\mathbb{R}), (D, A) \mapsto DA$ ist surjektiv.
(Hinweis: Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Zeilen- oder Spaltenvektoren einer gegebenen Matrix an.)

(iv) Man beschreibe diejenige Multiplikation auf $\Gamma = \Delta_n \times O(n)$, mit welcher μ ein Gruppenisomorphismus wird.

***-Aufgabe 60** (Matrizenfunktionen)

Für die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe Bild oben) spielt die Exponentiation einer quadratischen komplexen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, also

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i,$$

eine wichtige Rolle. Dass diese Reihe von Matrizen konvergiert, ist nicht selbstverständlich. Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp(A)\, \exp(B) \text{ falls } AB = BA, \\ \exp(A)^{-1} &= \exp(-A), \\ \mathrm{Det}(\exp(A)) &= \exp(\mathrm{Spur}(A)). \end{aligned}$$

Wir wollen nun hier nicht nur in die Exponentialfunktion Matrizen einsetzen.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\mathfrak{M}_n(\Omega)$ sei die Menge der $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Spek}(A) \subset \Omega$. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine komplex-differenzierbare Funktion, d.h. um jeden Punkt von Ω ist f in eine komplexe Potenzreihe entwickelbar.

Für $A \in \mathfrak{M}_n(\Omega)$ sei $SAS^{-1} = J^{(1)} \oplus \ldots \oplus J^{(m)}$ die Jordan-Normalform mit den Jordan-Blöcken $J^{(k)} = J_{d_k}(\lambda_k)$ der Größe d_k und zu einem Eigenwert λ_k, für $k = 1, \ldots, m$, und einem gewissen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Für einen Jordan-Block definieren wir

$$f(J_{d_k}(\lambda_k)) := \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & f''(\lambda_k)/2 & \cdots & f^{(d_k-1)}(\lambda_k)/(d_k-1)! \\ & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \ldots & f^{(d_k-2)}(\lambda_k)/(d_k-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) \\ & & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

und

$$f(A) := S^{-1} f(J^{(1)}) \oplus \ldots \oplus f(J^{(m)}) S.$$

Man zeige:

(i) Die Definition ist unabhängig von der Transformationsmatrix S.

(ii) Ist $n = 1$, so ist $f(A)$ eine Fortsetzung der Funktion f und ist $f(z) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_q x^q$ ein Polynom (von irgendeinem Grad q), so ist nach der obgen Definition $f(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_q A^q$, also nichts anderes als das Einsetzen von A in f; vgl. Aufgabe 55.

(iii) Die Eigenwerte von $f(A)$ sind $f(\lambda_k)$ für $k = 1, \ldots, m$.

(iv) Falls X mit A kommutiert, so auch mit $f(A)$; insbesondere ist $Af(A) = f(A)A$.

(v) $f(A^\top) = f(A)^\top$.

(vi) $f(XAX^{-1}) = Xf(A)X^{-1}$ für invertierbares X.

Nun betrachten wir für ein festes A die Kurve $t \mapsto f(tA)$; sie ist für t nahe bei 1 definiert. Wir behaupten:
a) die Kurve ist differenzierbar und
b) die Ableitung ist

$$\frac{d}{dt} f(tA) = Af'(tA).$$

Für die Exponentialfunktion kann man $\Omega = \mathbb{C}$ nehmen und erhält $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$.