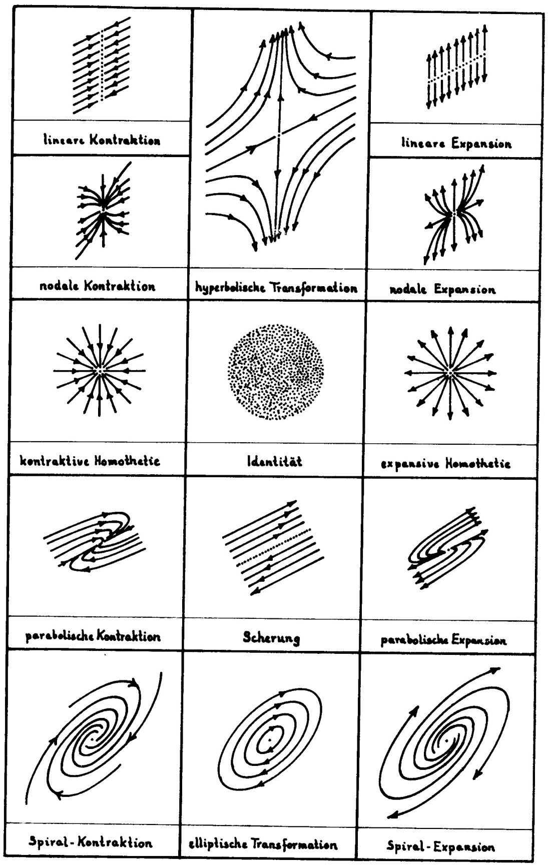
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 11 Abgabetermin : Freitag, 3.7.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Klassifikation der 2×2-Matrizen in 1-parametrigen Scharen;
aus: E. Brieskorn: Lineare Algebra und Analytische Geometrie II, S. 235.

Aufgabe 51 (Beispiel aus der Vorlesung)

Berechnen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52 (Beispiele für Jordan-Zerlegung)

Bringen Sie die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$ in Jordan-Normalform (in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$):

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & s^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & s^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_s = \begin{pmatrix} 2+is & is & is \\ -is & 2-is & is \\ 2is & 2is & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53 (Bilinearformen)

Welche der folgenden Funktionen $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Bilinearformen?

(i) $\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2$

(ii) $\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1 y_2 + 3y_1 x_2$

(iii) $\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$

(iv) $\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 - x_2$

Gegebenenfalls geben Sie an, ob die Bilinearformen symmetrisch oder alternierend sind und bestimmen sie die Menge der isotropen Vektoren.

Aufgabe 54 (Bilinearform für Polynome)

Sei $V := \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3. Bestimmen sie die Matrix der Bilinearform

$$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)h(t)dt$$

bzgl. der Basen $\mathfrak{B}_1 = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathfrak{B}_2 = (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x)$.

***-Aufgabe 55** (Jordan-Blöcke)

Es sei $J_d(\lambda)$ ein Jordan-Block der Größe d zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) Für die Potenzen gilt:

$$J_d(\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J_d(0)^i.$$

(ii) Daraus erhält man für ein Polynom $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad ℓ sofort

$$f(J_d(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!} J_d(0)^i,$$

wobei $f^{(i)}$ die i-te formale Ableitung des Polynoms f ist.

(iii) Man zeige

- $\mathrm{Det}(f(J_d(\lambda))) = f(\lambda)^d$ und $\mathrm{Spur}(f(J_d(\lambda))) = d\,f(\lambda)$.
- $f(J_d(\lambda)) = 0$ genau dann, wenn λ eine d-fache Nullstelle von f ist.
- $f(J_d(\lambda))$ ist genau dann invertierbar, wenn λ keine Nullstelle von f ist.

Δ	R	H	D	JNF	x = RNF	SONF	G_x	χ-FASER	1-PARAMETERGRUPPEN	
$\Delta < 0$	+	+	+	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 > \lambda_2$	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 > \lambda_2$	$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}$ $a,b,d \in \mathbb{R}$ $a > d$	A	einschaliges Hyperboloid	$\lambda_1 > \lambda_2 > 1$	nodale Expansion
									$\lambda_1 > 1 = \lambda_2$	lineare Expansion
									$\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$	hyperbolische Transformation
									$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 > 0$	lineare Kontraktion
									$1 > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nodale Kontraktion
$\Delta = 0$	-	+	+	$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$	G	Kegelspitze	$\lambda > 1$	expansive Homothetie
									$\lambda = 1$	Identität
									$\lambda < 1$	kontraktive Homothetie
	+	-	-	$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$	ZN	Kegel ohne Spitze	$\lambda > 1$	parabolische Expansion
									$\lambda = 1$	Scherung - Transvektion
									$\lambda < 1$	parabolische Kontraktion
$\Delta > 0$	+	+	-	$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \bar{\lambda}\end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$	$\begin{bmatrix}a & b\\ c & a\end{bmatrix}$ $bc < 0$ $b^2 \geqslant c^2$	Z_0K_0	zweischaliges Hyperboloid	$\lvert\lambda\rvert > 1$	Spiral-Expansion
									$\lvert\lambda\rvert = 1$	elliptische Transformation
									$\lvert\lambda\rvert < 1$	Spiral-Kontraktion

Aus: ibidem, S. 234