

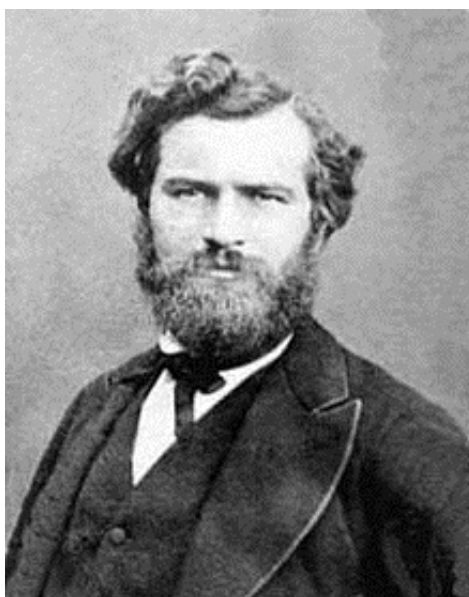
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 10

Abgabetermin : Freitag, 26.6.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922)

Aufgabe 46 (Nilpotente Anteile)

Es sei A die Begleitmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & & & -p_0 \\ 1 & 0 & & -p_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 & -p_{n-2} \\ & & & & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$

des Polynoms $p(t) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n$; wir nehmen an, dass nur ein einziger Koeffizient $p_i \neq 0$ ist. Sei $\psi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ die A entsprechende Abbildung in der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.

- (i) Man bestimme die Unterräume $K = \ker(\psi^d)$ und $B = \operatorname{im}(\psi^d)$ für das kleinste d mit $\ker(\psi^d) = \ker(\psi^{d+1})$.

- (ii) Man bestimme (gemäß einem Satz der Vorlesung) den nilpotenten Anteil $\psi_K : K \rightarrow K$ und den 'isomorphen' Anteil $\psi_B : B \rightarrow B$.

Genauer: man finde für die besagten Unterräume jeweils eine Basis und bestimme die zugehörige Matrix der besagten Abbildungen.

Aufgabe 47 (Zyklische Unterräume)

Für einen Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ mit $n = \dim V$ und ein beliebiges $v \in V$ definieren wir den *Zykelraum* von v als

$$Z(v) := \text{Span} \left(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{n-1}(v) \right).$$

Das kleinste $d \geq 0$, so daß $\text{Span} \left(v, \dots, \varphi^{d-1}(v) \right) = \text{Span} \left(v, \dots, \varphi^d(v) \right)$ gilt, nennen wir *Zykelindex* von v bzgl. φ . Es sei $0 = r_0 v + r_1 \varphi(v) + \dots + r_{d-1} \varphi^{d-1}(v) + \varphi^d(v)$ die nicht-triviale lineare Darstellung, die dann für $\varphi^d(v)$ gilt. Und wir nennen $r(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{d-1} x^{d-1} + x^d$ das *zyklische Polynom* $\text{ZP}_{\varphi,v}(x)$ von v bzgl. φ .

Offenbar ist $\dim Z(v) = d$; und $d = 0$ gilt nur für $v = 0$; und $d = 1$ dann und nur dann, wenn v ein Eigenvektor ist. Ebenso ist $Z(0) = 0$ und $Z(\lambda v) = Z(v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

Man zeige:

- (i) $Z(v)$ ist φ -invariant; wir schreiben $\varphi_v : Z(v) \rightarrow Z(v)$ für die Einschränkung. $Z(v)$ ist der kleinste φ -invariante Unterraum, der v enthält (oder gleichwertig: es ist der Durchschnitt über aller φ -invarianten Unterräume, die v enthalten).
- (ii) $Z(v) \supseteq Z(w)$ für jedes $w \in Z(v)$.
- (iii) Es gilt $Z(\varphi(v)) = \varphi(Z(v))$ und allgemeiner $Z(g(\varphi)(v)) = g(\varphi)(Z(v))$ für ein Polynom $g(x)$.
- (iv) Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}$ von $Z(v)$, so daß $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(\varphi|_{Z(v)})$ die Begleitmatrix zu $r(x) = \text{ZP}_{\varphi,v}(x)$ ist; also $\text{ZP}_{\varphi,v}(x) = \text{CP}_{\varphi_v}(x)$.

Beispiel: Man untersuche den Fall $V = \mathbb{K}^n$ und $\varphi = P_\sigma$ die Permutationsmatrix zu einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Aufgabe 48 (Haupträume und Auswertungsideal)

Für einen Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ mit $n = \dim V$ ist

$$I_\varphi = \text{kern}(\text{eval}_\varphi) = \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(\varphi) = 0\}$$

das Auswertungsideal von φ . Für ein $v \in V$ definieren wir ein weiteres Auswertungsideal

$$I_\varphi(v) := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(\varphi)(v) = 0\}.$$

Man zeige:

- (i) $I_\varphi(v)$ ist ein Ideal.
- (ii) $I_\varphi \subseteq I_\varphi(v)$ für alle $v \in V$, und $I_\varphi = \bigcap_{v \in V} I_\varphi(v)$.
- (iii) $I_\varphi = I_{\psi\phi\psi^{-1}}$ und $I_\varphi(\psi^{-1}(v)) = I_{\psi\phi\psi^{-1}}(v)$.
- (iv) Das charakteristische Polynom $\text{CP}_\varphi(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{m_i}$ zerfalle in Linearfaktoren, mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und $m_1 + \dots + m_k = n$; aus jedem Hauptraum $V_i = \text{Hau}_{\lambda_i}(\varphi) = \text{kern}((\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i})$ sei ein v_i so gewählt, daß (a) $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i-1}(v_i) \neq 0$ und (b) $v_i = f_i(\varphi)(w_i)$ für ein $w_i \in V$ und $f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j}$ gilt; dann ist $I_\varphi = I_\varphi(v)$ für $v = v_1 + \dots + v_k$.

Aufgabe 49 (Invariante Unterräume und charakteristisches Polynom)

Es sei $\varphi : V \rightarrow V$, mit V endlich-dimensional, und U sei ein invarianter Unterraum. Wir bezeichnen mit $\varphi_U : U \rightarrow U$ die Einschränkung von φ auf U und mit $\varphi_{V/U} : V/U \rightarrow V/U$ die auf dem Quotientenraum V/U induzierte Abbildung $\varphi_{V/U}(v+U) := \varphi(v)+U$. In dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\iota} & V & \xrightarrow{\pi} & V/U \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_U & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_{V/U} \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\iota} & V & \xrightarrow{\pi} & V/U \longrightarrow 0 \end{array}$$

bezeichnet ι die Inklusion von U in V und π die kanonische Projektion auf V/U . Man zeige:

$$\text{CP}_\varphi(x) = \text{CP}_{\varphi_U}(x) \cdot \text{CP}_{\varphi_{V/U}}(x)$$

***-Aufgabe 50** (Invariante Unterräume und Minimalpolynom)

Es sei $\varphi : V \rightarrow V$, V endlich-dimensional, und U sei ein invarianter Unterraum. Man zeige, dass mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 49 gilt:

- (i) $\text{MP}_{\varphi_U}(x)$ und $\text{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$ teilen beide $\text{MP}_\varphi(x)$; und $\text{MP}_\varphi(x)$ teilt $\text{MP}_{\varphi_U}(x) \cdot \text{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$.

Zeigen Sie genauer:

- (i₁) MP_{φ_U} teilt MP_φ
 - (i₂) $(\varphi_{V/U})^q = (\varphi^q)_{V/U}$
 - (i₃) $(\varphi_1 + \varphi_2)_{V/U} = (\varphi_1)_{V/U} + (\varphi_2)_{V/U}$ und $(\lambda\varphi)_{V/U} = \lambda(\varphi)_{V/U}$
 - (i₄) $(f(\varphi))_{V/U} = f((\varphi)_{V/U})$ für $f \in \mathbb{K}[x]$.
 - (i₅) Setzt man $f = \text{MP}_\varphi$, so folgt: $\text{MP}_{\varphi_{V/U}}$ teilt MP_φ .
 - (i₆) Es gilt für alle $v \in V$: $0 + U = \text{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi_{V/U})(v + U) = \text{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)(v) + U$, also $\text{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)V \subseteq U$.
 - (i₇) Aus $\text{MP}_{\varphi_U}(\varphi) \cdot \text{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)V = 0$ folgt: MP_φ teilt $\text{MP}_{\varphi_U} \cdot \text{MP}_{\varphi_{V/U}}$.
- (ii) Sind $\text{MP}_{\varphi_U}(x)$ und $\text{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$ teilerfremd, so ist $\text{MP}_\varphi(x) = \text{MP}_{\varphi_U}(x) \cdot \text{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$.