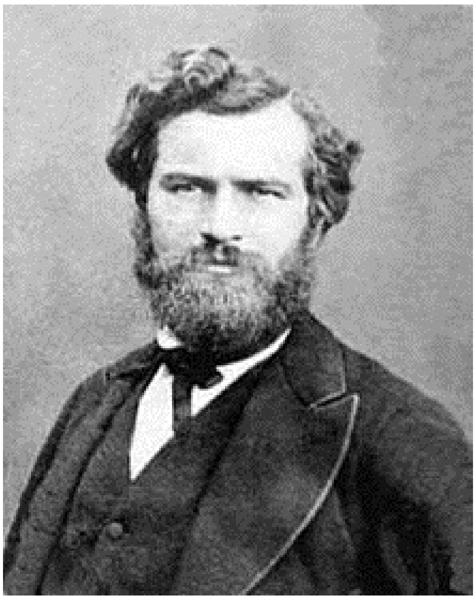
Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 10 Abgabetermin : Freitag, 26.6.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922)

Aufgabe 46 (Nilpotente Anteile)

Es sei A die Begleitmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -p_0 \\ 1 & 0 & & & & -p_1 \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -p_{n-2} \\ & & & & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$

des Polynoms $p(t) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-1} x^{n-1} + x^n$; wir nehmen an, dass nur ein einziger Koeffzient $p_i \neq 0$ ist. Sei $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ die A entsprechende Abbildung in der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.

(i) Man bestimme die Unterräume $K = \mathrm{kern}(\psi^d)$ und $B = \mathrm{im}(\psi^d)$ für das kleinste d mit $\mathrm{kern}(\psi^d) = \mathrm{kern}(\psi^{d+1})$.

(ii) Man bestimme (gemäß einem Satz der Vorlesung) den nilpotenten Anteil $\psi_K : K \to K$ und den 'isomorphen' Anteil $\psi_B : B \to B$.

Genauer: man finde für die besagten Unterräume jeweils eine Basis und bestimme die zugehörige Matrix der besagten Abbildungen.

Aufgabe 47 (Zyklische Unterräume)

Für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $n = \dim V$ und ein beliebiges $v \in V$ definieren wir den *Zykelraum* von v als

$$Z(v) := \mathrm{Span}\Big(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v)\Big) .$$

Das kleinste $d \geq 0$, so daß $\mathrm{Span}\Big(v, \ldots, \varphi^{d-1}(v)\Big) = \mathrm{Span}\Big(v, \ldots, \varphi^{d}(v)\Big)$ gilt, nennen wir *Zykelindex* von v bzgl. φ. Es sei $0 = r_0 + r_1\varphi(v) + \cdots + r_{d-1}\varphi^{d-1}(v) + \varphi^d(v)$ die nicht-triviale lineare Darstellung, die dann für $\varphi^d(v)$ gilt. Und wir nennen $r(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{d-1}x^{d-1} + x^d$ das *zyklische Polynom* $\mathrm{ZP}_{\varphi,v}(x)$ von v bzgl. φ.

Offenbar ist $\dim Z(v) = d$; und $d = 0$ gilt nur für $v = 0$; und $d = 1$ dann und nur dann, wenn v ein Eigenvektor ist. Ebenso ist $Z(0) = 0$ und $Z(\lambda\, v) = Z(v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

Man zeige:

(i) $Z(v)$ ist φ-invariant; wir schreiben $\varphi_v : Z(v) \to Z(v)$ für die Einschränkung. $Z(v)$ ist der kleinste φ-invariante Unterrraum, der v enthält (oder gleichwertig: es ist der Durchschnitt über aller φ-invarianten Unterräume, die v enthalten).

(ii) $Z(v) \supseteq Z(w)$ für jedes $w \in Z(v)$.

(iii) Es gilt $Z(\varphi(v)) = \varphi(Z(v))$ und allgemeiner $Z(g(\varphi)(v)) = g(\varphi)(Z(v))$ für ein Polynom $g(x)$.

(iv) Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}$ von $Z(v)$, so daß $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(\varphi|_{Z(v)})$ die Begleitmatrix zu $r(x) = \mathrm{ZP}_{\varphi,v}(x)$ ist; also $\mathrm{ZP}_{\varphi,v}(x) = \mathrm{CP}_{\varphi_v}(x)$.

Beispiel: Man untersuche den Fall $V = \mathbb{K}^n$ und $\varphi = P_\sigma$ die Permutationsmatrix zu einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Aufgabe 48 (Haupträume und Auswertungsideal)

Für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $n = \dim V$ ist

$$I_\varphi = \mathrm{kern}(\mathrm{eval}_\varphi) = \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(\varphi) = 0\}$$

das Auswertungsideal von φ. Für ein $v \in V$ definieren wir ein weiteres Auswertungsideal

$$I_\varphi(v) := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(\varphi)(v) = 0\} .$$

Man zeige:

(i) $I_\varphi(v)$ ist ein Ideal.

(ii) $I_\varphi \subseteq I_\varphi(v)$ für alle $v \in V$, und $I_\varphi = \bigcap_{v \in V} I_\varphi(v)$.

(iii) $I_\phi = I_{\psi\phi\psi^{-1}}$ und $I_\phi(\psi^{-1}(v)) = I_{\psi\phi\psi^{-1}}(v)$.

(iv) Das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}_\varphi(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{m_i}$ zerfalle in Linearfaktoren, mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und $m_1 + \ldots + m_k = n$; aus jedem Hauptraum $V_i = \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(\varphi) = \mathrm{kern}((\varphi - \lambda_i\, \mathrm{id}_V)^{m_i})$ sei ein v_i so gewählt, daß (a) $(\varphi - \lambda_i\, \mathrm{id}_v)^{m_i - 1}(v_i) \neq 0$ und (b) $v_i = f_i(\varphi)(w_i)$ für ein $w_i \in V$ und $f_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - \lambda_j)^{m_j}$ gilt; dann ist $I_\varphi = I_\varphi(v)$ für $v = v_1 + \cdots + v_k$.

Aufgabe 49 (Invariante Unterräume und charakteristisches Polynom)

Es sei $\varphi : V \to V$, mit V endlich-dimensional, und U sei ein invarianter Unterraum. Wir bezeichnen mit $\varphi_U : U \to U$ die Einschränkung von φ auf U und mit $\varphi_{V/U} : V/U \to V/U$ die auf dem Quotientenraum V/U induzierte Abbildung $\varphi_{V/U}(v+U) := \varphi(v)+U$. In dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi_U"] & V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & V/U \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{V/U}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] & V \arrow[r, "\pi"] & V/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

bezeichnet ι die Inklusion von U in V und π die kanonische Projektion auf V/U. Man zeige:

(i) $\mathrm{CP}_\varphi(x) = \mathrm{CP}_{\varphi_U}(x) \cdot \mathrm{CP}_{\varphi_{V/U}}(x)$.

(ii) φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn φ_U und $\varphi_{V/U}$ diagonalisierbar sind.

***-Aufgabe 50** (Invariante Unterräume und Minimalpolynom)

Es sei $\varphi : V \to V$, V endlich-dimensional, und U sei ein invarianter Unterraum. Man zeige, dass mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 49 gilt:

(i) $\mathrm{MP}_{\varphi_U}(x)$ und $\mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$ teilen beide $\mathrm{MP}_\varphi(x)$; und $\mathrm{MP}_\varphi(x)$ teilt $\mathrm{MP}_{\varphi_U}(x) \cdot \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$.

Zeigen Sie genauer:

(i_1) MP_{φ_U} teilt MP_φ

(i_2) $(\varphi_{V/U})^q = (\varphi^q)_{V/U}$

(i_3) $(\varphi_1 + \varphi_2)_{V/U} = (\varphi_1)_{V/U} + (\varphi_2)_{V/U}$ und $(\lambda\varphi)_{V/U} = \lambda(\varphi)_{V/U}$

(i_4) $(f(\varphi))_{V/U} = f((\varphi)_{V/U})$ für $f \in \mathbb{K}[x]$.

(i_5) Setzt man $f = \mathrm{MP}_\varphi$, so folgt: $\mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}$ teilt MP_φ.

(i_6) Es gilt für alle $v \in V$: $0 + U = \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi_{V/U})(v + U) = \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)(v) + U$, also $\mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)V \subseteq U$.

(i_7) Aus $\mathrm{MP}_{\varphi_U}(\varphi) \cdot \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(\varphi)V = 0$ folgt: MP_φ teilt $\mathrm{MP}_{\varphi_U} \cdot \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}$.

(ii) Sind $\mathrm{MP}_{\varphi_U}(x)$ und $\mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$ teilerfremd, so ist $\mathrm{MP}_\varphi(x) = \mathrm{MP}_{\varphi_U}(x) \cdot \mathrm{MP}_{\varphi_{V/U}}(x)$.