Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 1 Abgabetermin : Freitag, 17.4.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

D_2 is a special case of the general dihedral group D_n, which is, for $n > 2$, the symmetry group of the regular n-gon, $\{n\}$. (See Figure 2.7*a* for the cases $n = 3, 4, 5$.) This is evidently a group of order $2n$, consisting of n rotations (through the n effectively distinct multiples of $360°/n$) and n reflections. When n is odd, each of the n mirrors joins a vertex to the midpoint of the opposite side; when n is even, $\frac{1}{2}n$ mirrors join pairs of opposite vertices and $\frac{1}{2}n$ bisect pairs of opposite sides [see Birkhoff and MacLane **1**, pp. 117–118, 135].

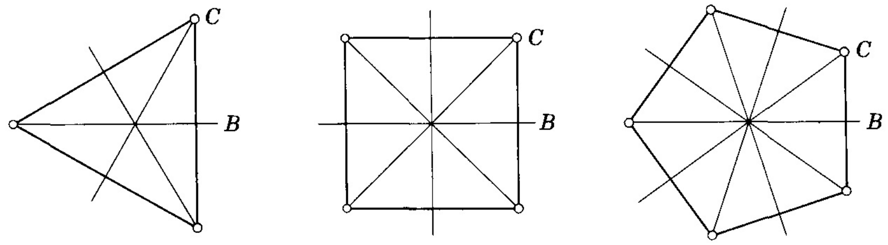

Figure 2.7a

The n rotations are just the operations of the cyclic group C_n. Thus the operations of D_n include all the operations of C_n: in technical language, C_n is a *subgroup* of D_n. The rotation through $360°/n$, which generates the subgroup, may be described as the product $S = R_1R_2$ of reflections in two adjacent mirrors (such as OB and OC in Figure 2.7*a*) which are inclined at $180°/n$.

Aus: Coxeter: Introduction to Geometry, 1989. (Hinweis zur Notation: Coxeter bezeichnet die Symmetriegruppe des regulären n-Ecks mit D_n, Spiegelungen mit R und Rotationen mit S.)

Aufgabe 1 (Normalisator)

Es seien H und N Untergruppen der Gruppe G mit $H \leq N \leq G$.

(i) Sei H normal in N. Ist H auch normal in G?

Zeigen Sie:

(ii) Die Menge

$$N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$$

bildet eine Untergruppe von G.

(iii) $H \leq N_G(H)$ und H ist normal in $N_G(H)$ (aber vielleicht nicht in ganz G). Man nennt deshalb $N_G(H)$ den *Normalisator von H in G*.

(iv) $N_G(H) = G \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$.

Aufgabe 2 (Diagonalmatrizen)

In der Gruppe $G = GL_{2n}(\mathbb{K})$ betrachten wir alle Blockmatrizen der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$$

mit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$.

(i) Zeigen Sie: Diese Matrizen bilden eine Untergruppe H von G.

(ii) Die Matrizen der Form $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ bilden eine Untergruppe H' von H. Man zeige, daß H' normal in H ist.

(iii) Bestimmen Sie die Quotientengruppe H/H'.

Aufgabe 3 (Normalisatoren in symmetrischen Gruppen)

Für die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_{2n}$ unterteilen wir das Alphabet in zwei gleichgroße Teilmengen $I_1 = \{1, \ldots, n\}$ und $I_2 = \{n+1, \ldots, 2n\}$. Wir betrachten die Untergruppe H aller Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ mit $\sigma(I_1) = I_1$ oder $= I_2$ und $\sigma(I_2) = I_2$ oder $= I_1$. Und weiter die Untergruppe $N \leq H$ aller $\sigma' \in \mathfrak{S}_{2n}$ mit $\sigma'(I_1) = I_1$ und $\sigma'(I_2) = I_2$.

Zeigen Sie:

(i) N ist normal in H, aber N und H sind beide nicht normal in $\mathfrak{S}_{2n}$.

(ii) $H/N \cong \mathfrak{S}_2$.

(iii)* Man betrachte analog in der $\mathfrak{S}_{ln}$ mit der Unterteilung des Alphabets in Teilmengen $I_k = \{(k-1)n+1, \ldots, (k-1)n+n\}$ $(k = 1, \ldots, l)$ die Untergruppe H aller Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{ln}$ mit $\sigma(I_k) = I_{k'}$ für ein k', und die Untergruppe N aller $\sigma' \in \mathfrak{S}_{ln}$ mit $\sigma'(I_k) = I_k$. Wieder ist N normal in H. Was ist H/N ?

Aufgabe 4 (Nebenklassen)

Sei H die Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Man Zeige:

(i) Alle Linksnebenklassen gH und alle Rechtsnebenklassen Hg mit $g \in G$ sind gleichmächtig und zwar ist ihre Mächtigkeit die von H.

(ii) Wann gilt $gH = Hg$ für alle $g \in G$?

(iii) Schreiben Sie für die Diedergruppe $G = D_8$, also der aller Rotationen und Spiegelungen eines regelmäßigen 4-Ecks, und die Untergruppen $H_1 = \{id, S_1\}$ mit S_1 eine Spiegelung und $H_2 = Rot_n$ die Untergruppe aller Rotationen sämtliche Nebenklassen auf.

***-Aufgabe 5** (Euler-Charakteristik)

Ein *Kettenkomplex* von Vektorräumen ist eine Folge

$$V_\bullet : 0 \xleftarrow{\partial_0} V_0 \xleftarrow{\partial_1} V_1 \xleftarrow{\partial_2} V_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow V_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} V_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \cdots$$

von Vektorräumen V_n und linearen Abbildungen $\partial_n : V_n \to V_{n-1}$, mit der Eigenschaft

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

für alle $n \geq 0$. Man nennt die ∂_n *Randoperatoren*.

Es folgt $\mathrm{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$. Man nennt $Z_n := \ker(\partial_n)$ die *Zykel* in Grad n, und $B_n := \mathrm{im}(\partial_{n+1})$ die *Ränder* im Grad n. Der Quotientenvektorraum $H_n(V_\bullet) := Z_n/B_n$ heißt *n-te Homologie* von $V_\bullet$.

Wir nehmen nun an, daß alle V_n endlich-dimensional sind und $V_n = 0$ für $n > d$. Die Zahl

$$\chi(V_\bullet) := \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \dim V_k$$

nennen wir die *Euler-Charakteristik* von $V_\bullet$. Wir wollen beweisen:

$$\chi(V_\bullet) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \dim H_k(V_\bullet).$$

Dazu betrachte man

$$B_n \rightarrowtail Z_n \twoheadrightarrow H_n \tag{1}$$

$$Z_n \rightarrowtail V_n \xrightarrow{\partial_n|^{B_{n-1}}} B_{n-1} \tag{2}$$

und benutze

$$\begin{aligned} \dim Z_n &= \dim B_n + \dim H_n \\ \dim V_n &= \dim B_{n-1} + \dim Z_n. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir betrachten nun ein Tetraeder mit 4 Ecken $0, 1, 2, 3$. Dieses besitzt 6 Kanten und je drei Kanten bilden insgesamt 4 Dreiecke. Wir bezeichnen die orientierte Kante von Ecke $[i]$ nach Ecke j mit $[i, j]$. Ein orientiertes Dreieck mit Ecken i, j, k (in dieser Reihenfolge) bezeichnen wir mit $[i, j, k]$. Man spricht von 0-, 1- und 2-Simplizes.

Wir definieren nun folgenden Kettenkomplex $V_\bullet$:

(1) Seien V_0, V_1 und V_2 die freien 4-, 6- und 4-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume, die von den orientierten 0-, 1- und 2-Simplizes erzeugt werden.

(2) Die linearen Abbildungen $\partial_n : V_n \to V_{n-1}$ sind wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned} \partial_0[i] &= 0, \\ \partial_1[i, j] &= [j] - [i] \\ \partial_2[i, j, k] &= [j, k] - [i, k] + [i, j]. \end{aligned}$$

Dann gilt $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ für alle $n \geq 0$ und die Homologien ergeben sich zu

$$H_0(V_\bullet) \cong \mathbb{K}, H_1(V_\bullet) = 0, H_2(V_\bullet) \cong \mathbb{K}.$$

Damit berechnet sich die Euler-Charakteristik des Tetraeders zu $\chi(V_\bullet) = 1-0+1 = 4-6+4 = 2$.

According to Weyl [**1**, pp. 66 ,99], it was Leonardo da Vinci who discovered that the only finite groups of isometries in the plane are

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,$$
$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots.$$

His interest in them was from the standpoint of architectural plans. Of course, the prevalent groups in architecture have always been D_1 and D_2. But the pyramids of Egypt exhibit the group D_4, and Leonardo's suggestion has been followed to some extent in modern times: the Pentagon Building in Washington has the symmetry group D_5, and the Bahai Temple near Chicago has D_9. In nature, many flowers have dihedral symmetry groups such as D_6. The symmetry group of a snowflake is usually D_6 but occasionally only D_3. [Kepler **1**, pp. 259–280.]

If you cut an apple the way most people cut an orange, the core is seen to have the symmetry group D_5. Extending the five-pointed star by straight cuts in each half, you divide the whole apple into ten pieces from each of which the core can be removed in the form of two thin flakes.

Ebenda.