Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 9 Abgabetermin : Freitag, 12.12.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Gesetzt, es gebe eine große nützliche mathematische Wahrheit, auf die der Erfinder durch einen offenbaren Trugschluß gekommen wäre; – wenn es dergleichen nicht gibt, so könnte es doch dergleichen geben – leugnete ich darum diese Wahrheit, entsagte ich dann, mich dieser Wahrheit zu bedienen? (Lessing, Theologische Streitschriften)

Einleitung. Am 7. Dezember 1873 entwuchs die Mengenlehre den Kinderschuhen. An diesem Tag nämlich bewies Georg Cantor, daß die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist, also nicht in „abzählender" Gestalt $\{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$ geschrieben werden kann [2, S. 115 ff.]. Er legte damit zu einem Zeitpunkt, als der Begriff des *aktual Unendlichen*, die Existenz unendlicher Mengen als *fertiger* Gesamtheiten, in der Mathematik noch kontrovers war, den Grundstein zur *Theorie der unendlichen Mächtigkeiten*. 1878 zeigte er, daß das lineare Kontinuum der reellen Zahlen bijektiv auf die höherdimensionalen Kontinua Ebene, Raum, ... abgebildet werden kann, daß demnach die Kontinua verschiedener Dimension gleichmächtig sind [2, S. 119 ff.]. Mit diesem unerwarteten Resultat gab er den Anstoß zur Entwicklung der Dimensionstheorie. In der Folgezeit führten ihn Untersuchungen über die Bildung $H(A)$ der Menge der Häufungspunkte einer reellen Zahlenmenge A, indem er den Bildungsprozeß gemäß

$$A^{(0)} := A, \quad A^{(1)} := H(A), \quad \ldots, \quad A^{(n+1)} := H(A^{(n)}), \ldots,$$

$$A^{(\infty)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}, \qquad A^{(\infty+1)} := H(A^{(\infty)}), \ldots$$

ins Transfinite fortsetzte, zur Schöpfung der *Theorie der transfiniten Ordinalzahlen* [2, S. 145 ff.]. Anknüpfungspunkt war dabei eine Arbeit über den Identitätssatz für trigonometrische Reihen [2, S. 92 ff.], ein Umstand, den Zermelo [2, S. 102] zum Anlaß nimmt, „in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen ‚Mengenlehre' zu erblicken".

aus: Ebbinghaus et al.: Zahlen

Aufgabe 41 (Koordinatenfunktionen)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik ungleich 3 und V der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^3$.

(i) Man berechne für die geordnete Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ mit $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (1,1,2)$ und $b_3 = (3,3,3)$ die Koordinantenfunktion $K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^3$.

(ii) Man finde eine Verkettung von Umformungen $\mathfrak{M}_i[\lambda]$, $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{V}_{ij}$, welche die Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3)$ in $\mathcal{B}$ überführt.

(iii) Es sei $\mathbb{B}(V)$ die Menge aller Basen in V, jetzt ein beliebiger n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wir betrachten analog zu den Umformungen

$$\mathfrak{M}_i[\lambda], \mathfrak{A}_{ij}, \mathfrak{V}_{ij} : \mathbb{B}(V) \to \mathbb{B}(V)$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und $\lambda \neq 0$ auch die linearen Abbildungen

$$M_i[\lambda], A_{ij}, V_{ij} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} M_i[\lambda](x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) \\ A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ V_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) &= (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Man zeige die Formeln

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{M}_i[\lambda](\mathcal{B})} &= M_i[\lambda^{-1}] \circ K_{\mathcal{B}} \\ K_{\mathfrak{A}_{ij}(\mathcal{B})} &= A_{ji}^{-1} \circ K_{\mathcal{B}} \\ K_{\mathfrak{V}_{ij}(\mathcal{B})} &= V_{ij} \circ K_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 42 (Matrixprodukte)

Es sei A eine $(m \times k)$-Matrix und B eine $(k \times n)$-Matrix mit Einträgen in dem Körper $\mathbb{K}$; dann ist $C = AB$ eine $(m \times n)$-Matrix.

(i) Die Spalten von C sind Linearkombinationen der Spalten von A.

(ii) Es gilt deshalb $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$.

(iii) Es gilt also insbesondere $\mathrm{rg}(AB) \leq m, k, n$.

Gilt auch $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B)$?

Aufgabe 43 (Komplexe Struktur auf reellen Vektorräumen)

Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Unterkörper und $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ eine Basis von $\mathbb{L}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Für einen $\mathbb{L}$-Vektorraum V zeige man:
Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V als $\mathbb{L}$-Vektorraum, so ist $\mathcal{B}' = \Lambda \cdot \mathcal{B} = \{\lambda_i b | i = 1, \ldots, d \text{ und } b \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von V als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{K}}(V) = d \cdot \dim_{\mathbb{L}}(V)$.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{C}$.

(ii) Sei $I : V \to V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{R}$-Vektorraums und gelte $I^2 = -id_V$. Man zeige, daß V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, wenn wir die Skalierung wie folge definieren:

$$\lambda \cdot v = (\mu + i\nu) \cdot v = \mu v + \nu I(v)$$

für $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ und $v \in V$.
(Insbesondere folgt aus der Existenz eines solchen I bereits, daß $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ gerade ist.)

(iii) Sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$ und $\mathcal{L} = \{b_1, b_1', \ldots, b_n, b_n'\}$ eine Basis. Dann definiert

$$I(b_k) = b_k', I(b_k') = -b_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

einen Endomorphismus I (durch lineare Fortsetzung) mit der Eigenschaft $I^2 = -id_V$.

Aufgabe 44 (Vektorhotel 'Hilbert')

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit abzählbarer Dimension. Zeigen Sie:

(i) Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ unendliche viele Unterräume U mit $\dim(U) = n$; es gibt unendlich viele echte Unterräume U mit unendlicher Dimension, also gleichdimensional zu V. (Zusatzfrage: ist das 'unendlich viele' hier ein 'abzählbar-unendlich viele' oder ein 'überabzählbar-unendliche viele'?)

(ii) Es gibt Unterräume U und U' mit $U \cap U' = 0$ und $U + U' = V$, so dass (a) U endliche und U' unendliche Dimension hat, sowie (b) U und U' beide unendliche Dimension haben.

(iii) Es gibt unendlich viele Unterräume $U_1, U_2, \ldots$ mit $U_i \cap (+_{j \neq i} U_j) = 0$ für jedes $i = 1, 2 \ldots$ und $V = +_i U_i$.

***-Aufgabe 45** (Gleichgroße Durchschnitte)

In der Menge $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ seien m verschiedene Teilmengen $X_1, \ldots, X_m$ gegeben. Sie sollen die folgenden Eigenschaften haben:

(a) Alle X_i sind nicht leer.

(b) Alle Durchschnitte $X_i \cap X_j$ (für $i \neq j$) haben gleich viele Elemente.

Man folgere, dass es höchstens n solcher Teilmengen gibt, also $m \leq n$.
(Hinweis: Man betrachte die sog. $(m \times n)$-Inzidenzmatrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$, falls $j \in X_i$ und $a_{ij} = 0$ andernfalls. Die $(m \times m)$-Matrix $B = AA^\top$ ist nicht nur symmetrisch, sondern ist von besonders einfacher Gestalt. Ihr Rang ist m und aus der Rangungleichung (s. Aufgabe 42) folgt die Behauptung.)

Weiter: nun sei p eine Primzahl und wir wollen die Voraussetzung (a) verschärfen, hingegen (b) abschwächen:

(a') Die Mächtigkeiten der X_i sei nicht durch p teilbar.

(b') Alle Durchschnitte haben modulo p gleich viele Elemente.

Kann man immer noch $m \leq n$ beweisen? (Und könnten wir die Primzahl p durch eine Primzahlpotenz $q = p^k$ ersetzen?)

Allerdings waren bereits vor Cantors bahnbrechenden Arbeiten der Mengen- und der Unendlichkeitsbegriff Gegenstand scharfsinniger Untersuchungen. So führte im Hochmittelalter die Diskussion über das aktual Unendliche zu Betrachtungen über den Vergleich unendlicher Mengen mittels bijektiver Zuordnungen. Albert von Sachsen (ca. 1320–1390) beweist z. B. in seinen *Questiones subtilissime in libros de celo et mundo*, daß ein einseitig unendlich langer Holzbalken dasselbe Volumen besitzt wie der unendliche dreidimensionale Raum: In einem Gedankenexperiment zersägt er den Balken in endlich lange Stücke, die er zu sich jeweils anschließenden Kugelschalen umformt, um auf diese Weise den gesamten Raum mit Holz auszufüllen.

Ibidem.