Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

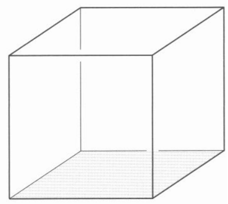
Wintersemester 2014/15

Blatt 8 Abgabetermin : Freitag, 5.12.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

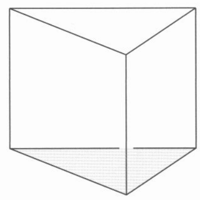
---

(2) Dehn-Invarianten

Für ein 3-dimensionales Polyeder P bezeichne M_P die Menge aller Winkel zwischen benachbarten Facetten (*Diederwinkel*), und zusätzlich der Zahl π. Damit erhalten wir für den Würfel C die Menge $M_C = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$, während wir für ein orthogonales Prisma über einem gleichseitigen Dreieck die Menge $M_Q = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ erhalten.



$M_C = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$



$M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

Für eine endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die M_P enthält, und eine $\mathbb{Q}$-lineare Funktion

$$f : V(M) \to \mathbb{Q},$$

die $f(\pi) = 0$ erfüllt, definieren wir nun die *Dehn-Invariante* von P (in Bezug auf f) als die reelle Zahl

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} \ell(e) \cdot f(\alpha(e)),$$

wobei die Summe über alle Kanten e des Polyeders gebildet wird, $\ell(e)$ die Länge von e bezeichnet, und $\alpha(e)$ der Winkel zwischen den beiden Facetten ist, die in e zusammenstoßen.

Wir werden später verschiedene Dehn-Invarianten ausrechnen. Für den Augenblick bemerken wir nur, dass $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} f(\pi) = 0$ für *jede* $\mathbb{Q}$-lineare Funktion f gelten muss, und dass deshalb

$$D_f(C) = 0$$

gilt: die Dehn-Invariante eines Würfels ist für *jedes* f gleich Null.

aus: Martin Aigner, Günther M. Ziegler: Das BUCH der Beweise

Aufgabe 36 (Koordinaten)

Im Vektorraum $V = P_3(\mathbb{K})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 betrachten wir den Unterraum der geraden Polynome $p \in V$ mit $p(x) = p(-x)$. Darin seien die Polynome $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$, $g(x) = -(x+1)(x-1)$ und $h(x) = -x^2 + 5$ gegeben. Welche Dimension haben die Unterräume $U_0 = \text{Span}(f)$, $U_1 = \text{Span}(f, g)$, $U_2 = \text{Span}(f, h)$ und $U_4 = \text{Span}(f, g, h)$?
(Hinweis: Rechnen Sie zuerst mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; hängt das Ergebnis von der Charakteristik von $\mathbb{K}$ ab?)

Aufgabe 37 (Drehungen)

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V. Dann ist $\text{Fix}(f) = \{x \in V \mid f(x) = x\}$ die Fixpunktmenge von f, offenbar ein Untervektorraum.

Zunächst betrachten wir den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$, für die man zeige:

a) Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f^3 = \mathrm{id}$.

b) Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f^3 = \mathrm{id}$ und $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 1$.

Nun seien V und W ein 2- bzw. 3-dimensionaler reeller Vektorraum. Man zeige:

a') Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $f^3 = \mathrm{id}$.

b') Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung $f : W \to W$ mit $f^3 = \mathrm{id}$ und $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 1$.

Können wir $f^3 = \mathrm{id}$ durch $f^n = \mathrm{id}$ oder gar $f^n = a \cdot \mathrm{id}$ ersetzen (für irgendein $a \in \mathbb{R}$)?

Aufgabe 38 (Idempotente Abbildungen)

Sei V ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *idempotent*, falls $f^2 = f$ gilt. (Ist f invertierbar, so ist natürlich $f = \mathrm{id}_V$, ein typisches Beispiel ist die Projektion in einen Unterraum von V.) Man zeige:

(i) $g := \mathrm{id}_V - f$ ist ebenfalls idempotent und $g \circ f = f \circ g = 0$.

(ii) $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = 0$ und $\mathrm{im}(f) + \ker(f) = V$.

(iii) $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Fix}(f) = \ker(g)$.

Aufgabe 39 (Reeller Funktionenraum mit überabzählbarer Basis)

Sei V der Vektorraum aller endlich-stückweise affinen, stetigen, Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$; d.h. es gibt für jedes f endlich viele Knickstellen $0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$ mit den Werten $\eta_i := f(\xi_i)$ und auf den $n+1$ Zwischenintervallen $J_0 = [0, \xi_1], J_1 = [\xi_1, \xi_2], \ldots J_n = [\xi_n, 1]$ ist f affin.
Man zeige:

1. V ist ein reeller Vektorraum.
2. Für ein $0 < \xi < 1$ sei $Z_\xi \in V$ definiert durch

$$Z_\xi : [0,1] \to \mathbb{R}, Z_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\xi} & 0 \le x \le \xi \\ \frac{x-1}{\xi-1} & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B} = \{Z_\xi |\ \xi \in]0,1[\}$ eine Basis von V.
(Hinweis: Für eine Funktion f mit Knickstellen wie oben vermuten wir, daß wir mit dem Ansatz

$$f = \lambda_1 Z_{\xi_1} + \ldots + \lambda_n Z_{\xi_n}$$

richtig liegen. Für die Steigung μ_k von f im Intervall J_k ($k = 0, \ldots, n$) erhalten wir $n+1$ Gleichungen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als Unbekannte. Dieses inhomogene LGS besitzt für alle $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und alle $\mu_0, \ldots, \mu_n$ eine eindeutige Lösung.)

Kommentar: Für den viel größeren Vektorraum W aller stetigen Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(1) = 0$ ist $\mathcal{B}$ keine Basis im Sinne der Linearen Algebra (in der Analysis auch Hamel-Basis genannt), aber eine 'approximative Basis' (auch Hilbert-Basis genannt) im folgenden Sinne: für jedes $g \in W$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Linearkombination $f = \lambda_1 Z_{\xi_1} + \ldots \lambda_n Z_{\xi_n} \in V$ mit $\| g - f \| := \sup\{|g(t) - f(t)| : t \in \mathbb{R}\} < \epsilon$.

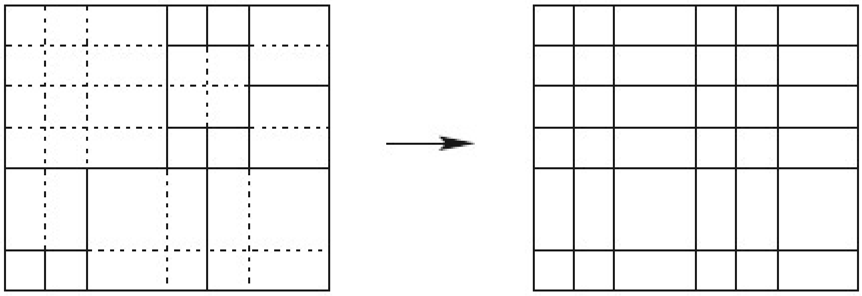
***-Aufgabe 40** (Hilbert[1], Dehn[2], Rechtecke und Quadrate)

Sei $\mathcal{R}$ ein Rechteck mit Seitenlängen $a = 1$ und b. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Es ist nicht möglich $\mathcal{R}$ in endlich viele Quadrate zu zerlegen, wenn b irrational ist.

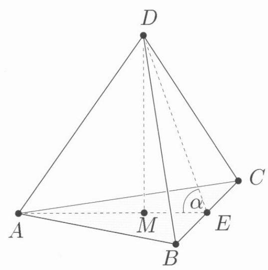
Hinweis: Nehmen Sie an, dies sei möglich.

1. Sei eine Zerlegung von $\mathcal{R}$ in endlich viele Quadrate $Q_1, \ldots, Q_m$ gegeben. Zunächst verlängern wir die Seiten der Quadrate zur vollen Breite resp. Höhe wie in der folgenden Abbildung:



2. Seien $s_1, \ldots, s_n$ die Seitenlängen der so erhaltenen Rechtecke der verfeinerten Zerlegung.
3. In $\mathbb{R}$, als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ betrachtet, sind 1 und b linear unabhängig.
4. Definieren Sie auf dem Untervektorraum
$$V := \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(1, b, s_1, \ldots, s_n) \subset \mathbb{R}$$
nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ durch $f(1) = 1, f(b) = -1$ und sonst beliebig.
5. Sei für jedes Rechteck $\mathcal{S}$ mit Seiten $p, q \in V$ die Dehn-Invariante $\operatorname{Dehn}(\mathcal{S}) := f(p)f(q) \in \mathbb{R}$.
6. Führen Sie zu einem Widerspruch, indem Sie zeigen: $\operatorname{Dehn}(\mathcal{R}) = \operatorname{Dehn}(Q_1) + \cdots + \operatorname{Dehn}(Q_m)$.

Beispiel 1. Für ein reguläres Tetraeder T_0 mit Kantenlänge ℓ können wir die Diederwinkel aus der Skizze ableiten. Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Mittelpunkt M die Höhe AE im Verhältnis 1:2 teilt, und mit $|AE| = |DE|$ erhalten wir $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ und damit
$$\alpha = \arccos\tfrac{1}{3}.$$
Sei nun $M := \{\alpha, \pi\}$, wobei das Verhältnis
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi}\arccos\tfrac{1}{3}$$
nach Satz 4 des Kapitels 6 (mit $n = 9$) irrational ist. Damit ist der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V(M)$ 2-dimensional mit Basis M, und es gibt eine $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ mit
$$f(\alpha) := 1 \quad \text{und} \quad f(\pi) := 0.$$
Für dieses f erhalten wir
$$D_f(T_0) = 6\ell f(\alpha) = 6\ell \neq 0.$$
Also ist *ein reguläres Tetraeder nie zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich zu einem Würfel*, weil die Dehn-Invariante eines Würfels für jedes f verschwindet.



Ibidem.

[1] David Hilbert (1862-1943), bedeutender Mathematiker.
[2] Max Dehn (1878-1943), Mathematiker, löste das 3. Hilbertsche Problem.