Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 7 Abgabetermin : Freitag, 28.11.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

A REMARK ON METHOD IN TRANSFINITE ALGEBRA†

BY MAX ZORN‡

The theorems of Steinitz concerning algebraic closure and the degree of transcendence are barred, from the algebraic point of view, by the well-ordering theorem and its theory. We wish to show how, by introducing a certain axiom on sets of sets instead of the well-ordering theorem, one is enabled to make the proofs shorter and more algebraic. The proofs will be given in terms of the non-axiomatic standpoint of set theory.

Definition 1. A set $\mathfrak{B} = \{B\}$ of sets B is called a *chain*, if for every two sets B_1, B_2, either $B_1 \supset B_2$ or $B_2 \supset B_1$.

Definition 2. A set $\mathfrak{A}$ of sets A is said to be closed (right-closed), if it contains the union $\sum_{\mathfrak{B} \ni B} B$ of every chain $\mathfrak{B}$ contained in $\mathfrak{A}$.

Then our *maximum principle* is expressible in the following form.

(MP). *In a closed set $\mathfrak{A}$ of sets A there exists at least one, A^*, not contained as a proper subset in any other $A \in \mathfrak{A}$.*

Ausschnitt aus Max Zorn: A remark on method in transfinite algebra,
Bull. AMS 10 (1935), 667-670.

Aufgabe 31 (Lineare Unabhängigkeit I)

Es seien U_1 und U_2 Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $U_1 \cap U_2 = 0$; es sei $U = U_1 + U_2 = \mathrm{Span}(U_1 \cup U_2)$. Für Teilmengen $\mathcal{B}_1 \subset U_1$ und $\mathcal{B}_2 \subset U_2$ sowie $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$ zeige man:

Sind $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Erzeugendensystem (bzw. linear-unabhängig bzw. eine Basis) in U_1 bzw. U_2, so ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem (bzw. linear-unabhängig bzw. eine Basis) in U.

Aufgabe 32 (Lineare Unabhängigkeit II)

Es seien $U_1, U_2, \dots, U_r$ Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und es sei $U = +_{i=1}^r U_i = \operatorname{Span}(\bigcup_{i=1}^r U_i)$ deren lineares Erzeugnis. Dann sind äquivalent:

(i) Jedes $u \in U$ hat eine Darstellung

$$u = u_1 + \cdots + u_r$$

mit eindeutig bestimmten $u_i \in U_i$ mit $i = 1, \dots, r$.

(ii) Ist

$$0 = u_1 + \cdots + u_r$$

mit $u_i \in U_i$ $(i = 1, \dots, r)$, so folgt $u_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.

(iii) Für jedes $i = 1, \dots, r$ gilt:

$$U_i \cap (+_{k \neq i} U_k) = 0.$$

Aufgabe 33 (Charakterisierung von Erzeugendensystemen und Basen)

Für eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ eines Vektorraums V sind äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist eine Basis.

(ii) $\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem.

(iii) $\mathcal{B}$ ist eine maximale linear-unabhängige Menge.

Aufgabe 34 (Basen endlicher Vektorräume)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum der Dimension d über $\mathbb{K}$.

(i) Kann es sein, daß V genau eine, genau zwei resp. genau drei geordnete Basen besitzt?

(ii) Man zeige, daß V genau

$$\beta = \prod_{i=0}^{d-1} (q^d - q^i)$$

geordnete Basen besitzt, wenn der Körper q Elemente hat.

***-Aufgabe 35** (Zornsches Lemma und Existenz von Basen)

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Zornschen Lemma, das wir uns wie folgt zur Verfügung stellen.

Es sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge M.
Eine *Kette* in $\mathcal{X}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{K} = \{K_i | i \in I\}$ von Elementen $K_i \in \mathcal{X}$ (mit Indizes i in einer Indexmenge I), so dass für je zwei Mengen K_i, K_j gilt: $K_i \subset K_j$ oder $K_j \subset K_i$.
Ein Element $S \in \mathcal{X}$ heißt *obere Schranke für eine Teilmenge* $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$, wenn $X \subset S$ für jedes $X \in \mathcal{Y}$ gilt.
Ein Element $R \in \mathcal{X}$ heißt *maximal*, falls für jedes $X \in \mathcal{X}$ gilt: wenn $R \subset X$, so ist $X = R$.
(Bemerkung: Ein maximales Element ist also nicht unbedingt größer als alle anderen, sondern kein anderes ist größer als es - was für nicht-totale Ordnungen einen Unterschied macht.)

Das Zornsche Lemma besagt dann:
Besitzt jede Kette eine obere Schranke, so gibt es ein maximales Element.

Daraus leite man die Existenz einer Basis in einem beliebigen Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ her. Es sei dafür $\mathcal{X}$ die Menge aller linear-unabhängigen Teilmengen von V.

Man zeige:

(i) Für jede Kette $\mathcal{K} = \{K_i | i \in I\}$ von linear-unabhängigen Mengen ist $S = \cup_i \ K_i$ linear-unabhängig und deshalb eine obere Schranke von $\mathcal{K} \in \mathcal{X}$.

(ii) Ist R dann ein maximales Element in $\mathcal{X}$, so ist es auch ein Erzeugendensystem.

(iii) Also ist R eine Basis.

III. Let K be an arbitrary field extension of k. A set of K-elements $\{a\}$ is said to be algebraically (respectively, linearly) independent, if no finite subset $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ satisfies an algebraic (linear) relation with coefficients in k (not all vanishing). The set of all these independent sets is closed; a maximal independent system, which exists as a consequence of the MP, is a basis for K/k with respect to algebraic (linear) dependence.

Ebenda.