Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 5 Abgabetermin : Freitag, 14.11.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Anmerkung. Mit $\zeta_1 = \zeta_{1,n} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ gilt

$$\zeta_\nu = \zeta_1^\nu\,, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beispiele für n-te Einheitswurzeln:

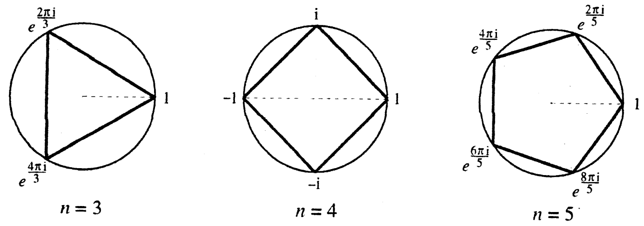
$n = 1$ $\{1\}$.

$n = 2$ $\{1, -1\} = \{\,(-1)^\nu;\quad \nu = 0, 1\,\}$.

$n = 3$ $\{\,1, -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\,\} = \{\,(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})^\nu;\quad 0 \le \nu \le 2\,\} = \{\,\zeta_{1,3}^\nu;\quad 0 \le \nu \le 2\,\}$.

$n = 4$ $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\} = \{\,\mathrm{i}^\nu;\quad 0 \le \nu \le 3\,\} = \{\,\zeta_{1,4}^\nu;\quad 0 \le \nu \le 3\,\}$.

$n = 5$ $\{\,\zeta_{1,5}^\nu;\quad 0 \le \nu \le 4\,\}$, $\zeta_{1,5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$.



Aus: Freitag, Busam: Funktionentheorie

Aufgabe 21 (Wurzeln aus komplexen Zahlen)

Für eine komplexe Zahl $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ haben wir nicht nur diese Darstellung in kartesischen Koordinaten, sondern auch die Darstellung $z = (r; \varphi)$ in Polarkoordinaten mit dem Betrag $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und dem Winkel

$$\varphi = \arccos\frac{x}{r} = \arcsin\frac{y}{r} \qquad (\text{für } r \neq 0).$$

(i) Folgern Sie aus dem Additionstheorem von Sinus und Cosinus, daß die Produktformel

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

gilt, also insbesondere $z^n = (r; \varphi)^n = (r^n; n\varphi)$ und $z^{-1} = (\frac{1}{r}, -\varphi)$ (für $z \neq 0$).

(ii) Folgern Sie, daß jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ für jedes natürliche n eine n-te Wurzel besitzt, also ein w mit $w^n = z$.

(iii) Finden Sie für jedes n die n-ten Wurzeln von 1, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln. Wieviele gibt es? Weiter: Ist ζ eine n-te Einheitswurzel und w eine n-te Wurzel von z, so ist auch ζw eine n-te Wurzel von z.

(iv) Es sei $n \geq 1$ und $1 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel. Folgern Sie aus der geometrischen Summenformel

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1} = \frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1}$$

(welche in jedem Körper für ein $\zeta \neq 1$ gilt), daß für jeden Teiler l von n gilt:

$$1 + \zeta^l + \zeta^{2l} + \ldots + \zeta^{l(\frac{n}{l}-1)} = 0.$$

Machen Sie eine Zeichnung für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ und 8.

Aufgabe 22 (Reelle Ebenen und komplexe Geraden)

(i) Wir betrachten $V = \mathbb{C}$ als reellen und $W = \mathbb{C}$ als komplexen Vektorraum. Für jedes $0 \neq z \in V$ ist $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(z) \subset V$ eine reelle Gerade (wie wir sie aus der ebenen Geometrie kennen). Wieviele komplexe Geraden $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(z) \subset W$ mit $0 \neq z \in W$ gibt es?

(ii) Nun betrachten wir $V = \mathbb{R}^4$ als reellen Vektorraum und $W = \mathbb{C}^2$ als komplexen Vektorraum. Als Mengen sind diese genau genommen eigentlich nicht gleich; wir benutzen deshalb die Bijektion

$$\phi : V \longrightarrow W, (x_1, y_1, x_2, y_2) \longmapsto ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (z_1, z_2).$$

Gegeben seien zwei Vektoren u und v in $\mathbb{R}^4$, die nicht null sind und nicht kollinear; es gibt also kein reelles λ mit $\lambda u = v$. Dann spannen beide eine reelle Ebene $E = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(u, v) \subset V$ auf.
Unter welchen Bedingungen an u und v ist $E' := \phi(E) \subset W$ eine komplexe Gerade in W, also $E' = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(w)$ für ein $0 \neq w \in W$?

Aufgabe 23 (Lineare und affine Unterräume über endlichen Körpern)

Man gebe alle linearen und affinen Unterräume in den Vektorräumen $V = (\mathbb{F}_3)^2$ und $(\mathbb{F}_2)^3$ an. Wieviele Geraden gibt es in $V = \mathbb{F}^n$ für einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ mit q Elementen?

Aufgabe 24 (Lineare und affine Unterräume)

Zeigen Sie:

(i) Sind U_1, U_2, U_3 drei Untervektorräume in einem Vektorraum V und $U_1 \subseteq U_3$, dann gilt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

(ii) Es seien $U_1 = \mathrm{Span}(u_1)$ und $U_2 = \mathrm{Span}(u_2)$ erzeugt von $0 \neq u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$. Unter welchen Bedingungen an u_1, u_2 sowie b_1, b_2 aus $\mathbb{R}^3$ sind die affinen Unterräume $A_1 = U_1 + b_1$ und $A_2 = U_2 + b_2$ (1) gleich, (2) disjunkt oder (3) schneiden sich in einem Punkt (den man wie berechnet)?

***-Aufgabe 25** (Konstruktion von neuen Körpern)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f(x) = x^2 + Ax + B$ ein Polynom über $\mathbb{K}$ (also $A, B \in \mathbb{K}$), welches in $\mathbb{K}$ keine Nullstelle hat.

(i) Finden Sie über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ ein solches Polynom.

(ii) Nun definieren wir auf der Menge $\mathbb{L} := \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ eine Addition durch

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

und eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - Byy', xy' + x'y - Ayy').$$

Mit $0 := (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ ist $\mathbb{L}$ offenbar ein Körper.

(iii) Überprüfen Sie die Existenz eines multiplikativen Inversen. Stellen Sie für $\mathbb{F}_2$ die Multiplikationstabelle auf.

(iv) Zeigen Sie: Die Teilmenge $\mathbb{K}' = \{(x, 0) \in \mathbb{L} | x \in \mathbb{K}\}$ ist ein Unterkörper, der isomorph zu $\mathbb{K}$ ist. Deshalb ist $\mathrm{char}(\mathbb{L}) = \mathrm{char}(\mathbb{K})$.

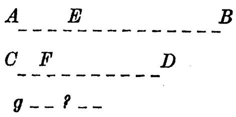
(v) Was haben wir für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, A = 0, B = 1$ erhalten?
Was haben wir für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2, A = B = 1$ erhalten? Jedenfalls einen Körper mit vier Elementen.
Was erhalten wir für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, A = B = 1$? Ist das ein neuer Körper von komplexen Zahlen?

(vi) Wir betrachten $f(x) = x^2 + Ax + B$ jetzt als ein Polynom über $\mathbb{L}$. Zeigen Sie: Plötzlich besitzt f in $\mathbb{L}$ eine Nullstelle, nämlich $\zeta = (0, 1)$.

(vii) Man zeige: Für einen endlichen Körper gibt es immer quadratische Polynome ohne Nullstellen. Also können wir folgern, daß es für jede Primzahl p nicht nur den Primkörper $\mathbb{F}_p$, sondern auch Körper $\mathbb{L}_n$ mit p^{2^n} $(n = 1, 2, \ldots)$ Elementen und $\mathrm{char}(\mathbb{L}_n) = p$ gibt.

Zu zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.

Die zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, seien $A\,B$, $C\,D$. Man soll das größte gemeinsame Maß von $A\,B$, $C\,D$ finden.



Wenn $C\,D$ hier $A\,B$ mißt — sich selbst mißt es auch — dann ist $C\,D$ gemeinsames Maß von $C\,D$, $A\,B$. Und es ist klar, daß es auch das größte ist; denn keine Zahl $> C\,D$ kann $C\,D$ messen.

Wenn $C\,D$ aber $A\,B$ nicht mißt, und man nimmt bei $A\,B$, $C\,D$ abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muß (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende mißt. Die Einheit kann nämlich nicht übrig bleiben; sonst müßten $A\,B$, $C\,D$ gegeneinander prim sein (VII, 1), gegen die Voraussetzung. Also muß eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende mißt. $C\,D$ lasse, indem es $B\,E$ mißt, $E\,A$, kleiner als es selbst, übrig; und $E\,A$ lasse, indem es $D\,F$ mißt, $F\,C$, kleiner als es selbst, übrig; und $C\,F$ messe $A\,E$.

Da $C\,F$ $A\,E$ mißt und $A\,E$ $D\,F$, muß $C\,F$ auch $D\,F$ messen; es mißt aber auch sich selbst, muß also auch das Ganze $C\,D$ messen. $C\,D$ mißt aber $B\,E$; also mißt $C\,F$ auch $B\,E$; es mißt aber auch $E\,A$, muß also auch das Ganze $B\,A$ messen. Und es mißt auch $C\,D$; $C\,F$ mißt also $A\,B$ und $C\,D$; also ist $C\,F$ gemeinsames Maß von $A\,B$, $C\,D$. Ich behaupte, daß es auch das größte ist. Wäre nämlich $C\,F$ nicht das größte gemeinsame Maß von $A\,B$, $C\,D$, so müßte irgendeine Zahl $> C\,F$ die Zahlen $A\,B$ und $C\,D$ messen. Dies geschehe, die Zahl sei g. Da g dann $C\,D$ mäße und $C\,D$ $B\,E$ mißt, mäße g auch $B\,E$; es soll aber auch das Ganze $B\,A$ messen, müßte also auch den Rest $A\,E$ messen. $A\,E$ mißt aber $D\,F$; also müßte g auch $D\,F$ messen; es soll aber auch das Ganze $D\,C$ messen, müßte also auch den Rest $C\,F$ messen, als größere Zahl die kleinere; dies ist unmöglich. Also kann keine Zahl $> C\,F$ die Zahlen $A\,B$ und $C\,D$ messen; $C\,F$ ist also das größte gemeinsame Maß von $A\,B$, $C\,D$ [q. e. d.].

Zusatz: Hiernach ist klar, daß eine Zahl, die zwei Zahlen mißt, auch ihr größtes gemeinsames Maß messen muß — q. e. d.

Euklid: Elemente, Buch VII.
(Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt von Cl. Thaer)