Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 4 Abgabetermin : Freitag, 7.11.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Aufgabe 16 (Gauß-Algorithmus)

Man wende den Gauß-Algorithmus auf das folgende LGS über $\mathbb{R}$ an:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

(i) Was ist die Treppenfunktion ? Was ist der Rang der Matrix ? Welches sind die freien (ungebundenen) Variablen, welches die gebundenen ?

(ii) Man schreibe die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A|b)$ in Parameterform.

Aufgabe 17 (Rang)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $b \in \mathbb{K}^m$. Einerseits können wir mit dem Gauß-Algorithmus den Rang $\mathrm{rg}(A)$ berechnen; andererseits können wir die erweiterte Matrix $\tilde{A} = (A, b) \in \mathrm{Mat}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ bilden und deren Rang $\mathrm{rg}(\tilde{A})$ berechnen. Man zeige:

(i) $\mathcal{L}(A|b) \neq \emptyset \Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$. D.h. das LGS $(A|b)$ ist genau dann konsistent, wenn A und $\tilde{A}$ den gleichen Rang haben.

(ii) Allgemein gilt: $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = rg(A)$ oder $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}(A) + 1$.

(iii) $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c:c} A' & 0 \\ \hdashline 0 & A'' \end{array}\right) = \mathrm{rg}(A') + \mathrm{rg}(A'')$

(iv) $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c} A' \\ \hdashline A'' \end{array}\right) \leq \mathrm{rg}(A') + \mathrm{rg}(A'')$

(v) $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c:c} A' & A'' \end{array}\right) \leq \mathrm{rg}(A') + \mathrm{rg}(A'')$

Aufgabe 18 (Körper- und Vektorraumaxiome)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Folgern Sie aus den Körperaxiomen für $a, b \in \mathbb{K}$:

(i) $0 \cdot a = 0$,

(ii) $ab = 0 \ \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$,

(iii) $(-1) \cdot a = -a$,

(iv) $-(-a) = a$,

(v) $(a^{-1})^{-1} = a$,

(vi) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$,

(vii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,

(viii) $a^{-1} + b^{-1} = (a+b)a^{-1}b^{-1}$.

Und nun sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Folgern Sie aus dem Vektorraumaxiomen für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$:

(ix) $0 \cdot v = 0$,

(x) $\lambda \cdot 0 = 0$,

(xi) $(-\lambda)v = -(\lambda v)$,

(xii) $\lambda v = 0 \ \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = 0$.

Aufgabe 19 (Kleiner Fermat'scher Satz)

Man betrachte die Primkörper $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p.

(i) Man folgere aus dem Binomischen Lehrsatz für $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$:

$$a^{p-1} = 1\,.$$

Nun beschränken wir uns auf die Fälle $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.

(ii) Man berechne alle Potenzen von allen Körperelementen.

(iii) In welchen dieser sechs Körper $\mathbb{F}_p$ gibt es n-te Wurzeln aus -1 ?

***-Aufgabe 20** (Adjunktion von $\sqrt{q}$)

Sei q eine natürliche Zahl, die keine Quadratzahl ist und $\mathbb{K} := \left\{a + b\sqrt{q} \in \mathbb{R} | a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Diese Menge wird auch mit $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{K}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{K}$.

(ii) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ ist der kleinste Unterkörper von $\mathbb{R}$, welcher $\sqrt{q}$ enthält.

(iii) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ ist der Durchschnitt aller Unterkörper $\mathbb{K}' \subset \mathbb{R}$, welche $\sqrt{q}$ enthalten.

A2. Der Fang-Cheng-Algorithmus

方 *Fang*: Chinesisch für Himmelsgegend, Rechteckseite.

程 *Ch'êng*: Weg, Muster, Regelung.

方 程 *Fang ch'êng*: Rechteckiges Muster.

Algorithmus: Sich an das griechische arithmos anlehnende Fehldeutung des Namens Al Chwarismis, 'des aus Chorism stammenden'.

الجبر *Al-dschabr* (Algebra): Arabisch für Einrenkung, Wiederherstellung. Bezieht sich auf das Hinüberschaffen negativer Glieder auf die andere Seite der Gleichung.

Das vorliegende Kapitel ist keine Einführung in morgen- und fernmorgenländische Sprachen. Unser Ziel ist die Übertragung des bekannten Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme (1.8) auf Matrizen. Die Methode wird in der 'Mathematik in neun Büchern'[1] — einem Werk, das laut Liu Hui im 2. Jh. v. Chr. von Chinas Kanzler Chang Ts'ang überarbeitet wurde — anhand von 18 Rechenaufgaben praktisch in der heutigen Form erklärt. Sie heisst dort Fang-Cheng-Regel. Wir benennen sie nach diesem ältesten Zeugnis.

Der Einfluss der 'Mathematik in neun Büchern' auf die wissenschaftliche Entwicklung Ostasiens ist enorm. Die Fibel wurde erstmals im Jahre 1084 gedruckt (erster Buchdruck im Abendland 1445!) und seitdem immer wieder neu verlegt. Im Abendland ist sie hingegen auch heute noch wenig bekannt: Das für unsere Bildung später massgebende 'Rechenverfahren der Wiederher– (Al-dschabr!) und Gegenüberstellung' schrieb Al Chwarismi[2], als im Abendland die Urenkel Pipins des Kurzen ihren frommen Kaiser und Vater auf dem Lügenfeld schlugen (1. Hälfte des 9. Jahrhunderts). Al Chwarismi war Iranier aus dem heutigen Choresmischen Gebiet (Uzbekistan, südlich des Aralsees). In seinem in Bagdad auf arabisch verfassten Werk verarbeitet er die Lehren der alten Inder und Babylonier (3. bis 1. vorchristliches Jahrtausend!). Geistesverwandtschaft mit chinesischer Rechenkunst ist vorhanden, Beziehung aber nicht nachgewiesen. Die Fang-Cheng-Methode jedenfalls kennt Al Chwarismi nicht. In den Akten erscheint sie als isolierte Perle chinesischen Könnens.

'On ne prête qu'aux riches' lehrt ein französisches Sprichwort. Gauss'sche Elimination[3] heisst vielleicht deshalb der Fang-Cheng-Algorithmus im Abendland. Kreditwürdig für uns bleibe dennoch mit seiner Terminologie der Kanzler Chang Ts'ang von Chinas hehrem Kaiser.

Aus: P. Gabriel: Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, Birkhäuser 1996, S.19.

Die Fussnoten zum Textausschnitt lauten:

1) Siehe 1.12(5) in Gabriel 1996 und A.P. Juschkewitsch: Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Teubner 1964, S.32-36. 2) Das Werk Al Chwarismis ist in einer lateinischen Übersetzung erhalten. Dort wird 'Dschabr' durch 'restauratio' übersetzt, 'muqabala' durch 'oppositio'. Siehe dazu J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik, Band 1, de Gruyter 1980, S.369 und Juschkewitsch 1964, S.186-220. 3) Gauß nannte sie 'eliminatio vulgaris'.