Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 3 Abgabetermin : Freitag, 31.10.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

> Drei Garben einer guten Ernte, zwei Garben einer mittleren Ernte und eine Garbe einer schlechten Ernte ergeben 39 dou Korn; zwei Garben einer guten Ernte, drei Garben von der mittleren und eine Garbe von der schlechten Ernte ergeben 34 dou; eine Garbe von der guten, zwei von der mittleren und drei von der schlechten liefern 26 dou (Abb. 3). Gefragt ist, wieviel Korn eine Garbe der guten, eine Garbe der mittleren und eine Garbe der schlechten Ernte liefert.

Aus dem chinesischen Jiuzhang suanshu (Neuen Bücher arithmetischer Technik), kompiliert und kommentiert von Liu Hui im Jahre 263 n. Chr.

Aufgabe 11 (Zeilenumformungen)

Lösen Sie durch Zeilenumformungen das chinesische Gleichungssystem aus dem Bild auf Blatt 2. (N.B.: Im Chinesischen schreibt man von oben nach unten und von rechts nach links.)

Aufgabe 12 (Globale Umformungen und Lösungsmengen)

Sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Man zeige:

(i) Die Abbildung $x \mapsto \lambda x$ ist eine Bijektion $\mathcal{L}(\lambda A|b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(A|b)$ (Sind die beiden Lösungsmengen gleich?)

(ii) Die Abbildung $x \mapsto \lambda^{-1} x$ ist eine Bijektion $\mathcal{L}(A|\lambda b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(A|b)$ (Sind die beiden Lösungsmengen gleich?)

(iii) Aus (i) und (ii) folgt: $\mathcal{L}(\lambda A|\lambda b) = \mathcal{L}(A|b)$.

(iv) Sei $A' \in \ Mat_{m',n}(\mathbb{R}), A'' \in \ Mat_{m'',n}(\mathbb{R})$ und $b' \in \mathbb{R}^{m'}, b'' \in \mathbb{R}^{m''}$. Dann ist

$$\mathcal{L}(A'|b') \cap \mathcal{L}(A''|b'') = \mathcal{L}\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hdashline A'' & b'' \end{array}\right).$$

(v) Sei $A' \in \ Mat_{m',n'}(\mathbb{R}), A'' \in \ Mat_{m'',n''}(\mathbb{R})$ und $b' \in \mathbb{R}^{m'}, b'' \in \mathbb{R}^{m''}$. Dann ist

$$(x', x'') \longmapsto x = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}$$

eine Bijektion

$$\mathcal{L}(A'|b') \times \mathcal{L}(A''|b'') \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}\left(\begin{array}{c:c|c} A' & 0 & b' \\ \hdashline 0 & A'' & b'' \end{array}\right).$$

Aufgabe 13 (Binomischer Lehrsatz modulo p)

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Primkörper mit p Elementen. Man zeige, daß für alle $a, b \in \mathbb{F}_p$ gilt:

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Aufgabe 14 (Kleeblattschlinge oder Knoten Nr. 3_1)

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & -x_2 & +2x_3 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$.

***-Aufgabe 15** (Logarithmische Spirale des Jakob Bernoulli[1])

Man betrachte für zwei $\alpha, \beta > 0$ die Spirale

$$L_{\alpha,\beta} = \{(\exp(\alpha t)\cos\beta t, \exp(\alpha t)\sin\beta t) \in \mathbb{C} | t \in \mathbb{R}\}$$

und zeige:

(a) Die Zahl 1 liegt auf $L_{\alpha,\beta}$; mit je zwei Zahlen z_1 und z_2 liegt auch ihr Produkt $z_1 z_2$ auf $L_{\alpha,\beta}$; mit jeder Zahl z liegt auch ihr Inverses $1/z$ auf $L_{\alpha,\beta}$. (N.B.: Wir werden das eine multiplikative Untergruppe nennen.)

(b) $L_{\alpha,0} = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

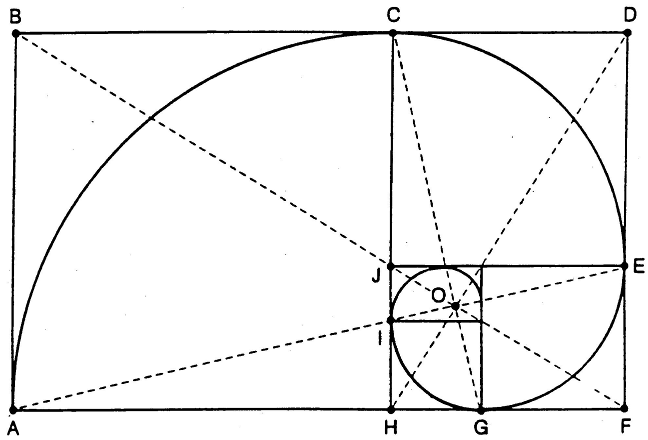
(c) $L_{0,\beta} = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | \; |z| = 1\}$

(d) $L_{\alpha\gamma,\beta\gamma} = L_{\alpha,\beta}$ für jedes $\gamma > 0$.

(e) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ liegt in einer der Spiralen $L_{\alpha,\beta}$.

(f) Jede Gerade durch den Ursprung schneidet die Spirale $L_{\alpha,\beta}$ unendlich oft, aber stets mit dem gleichen Winkel (für $\alpha, \beta \neq 0$).

(g) Das Seitenverhältnis der umschriebenen Rechtecke im unteren Bild ist stets der Goldene Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



[1] 1654-1705, aus einer schweizer Gelehrtenfamilie, aus der etliche Mathematiker hervorgegangen sind. Auf seinem Grabstein im Baseler Münster befindet sich eine Abbildung der logarithmischen Spirale mit der Inschrift: EADEM MUTATA RESURGO. Denn Kaustik und Evolute sind wieder logarithmische Spiralen, und so nahm er dies als ein Symbol der Unsterblichkeit.