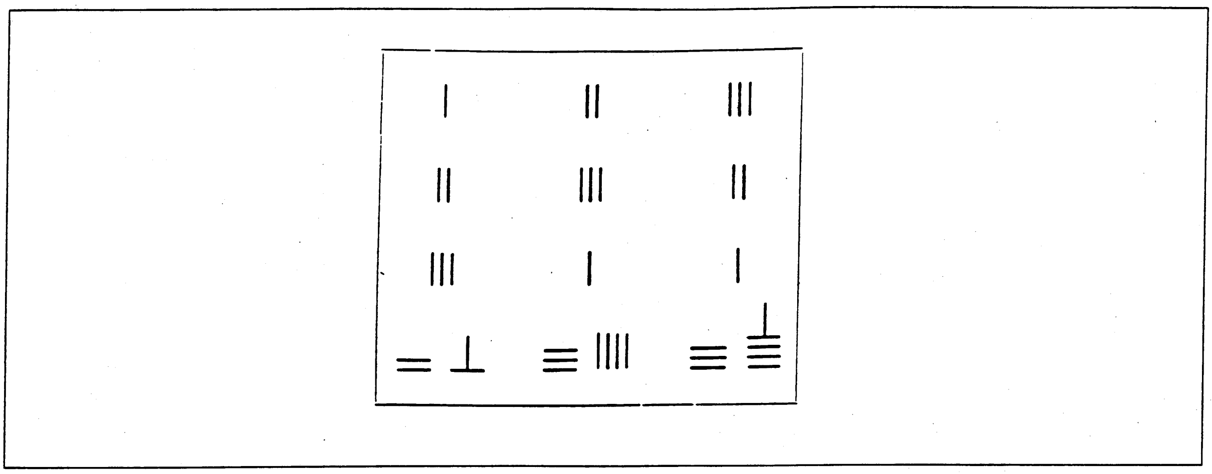
Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 2 Abgabetermin : Freitag, 24.10.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



aus: Chang Tsang: Mathematik in Neun Büchern, ca. 2. Jhdt. v. Chr.

Aufgabe 6 (Lösungsmengen)

Betrachen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} \alpha\, x_1 & -x_2 & & = b_1 \\ & x_2 & +\beta\, x_3 & = b_2 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie für $\alpha = \beta = 1$ die Lösungsmenge des homogenen Systems, und dann die Lösungsmenge des inhomogenen Systems für $b_1 = 0, b_2 = 2$.
(ii) Für welche α, β und welche b_1, b_2 ist die Lösungsmenge leer ?

Aufgabe 7 (Legierungen)

Aus Blei, Zink und Antimon soll eine Legierung L mit den Anteilen 81 % Blei, 12 % Zink und 7 % Antimon hergestellt werden. Vorhanden sind bereits drei alte Legierungen: eine Legierung L_1 mit den Anteilen 80 % Blei, 10 % Zink, 10 % Antimon, ein L_2 mit 79 % Blei, 14 % Zink und 7 % Antimon sowie ein L_3 mit 86 % Blei, 7 % Zink und 7 % Antimon.

In welchem Verhältnis müssen die drei Legierungen L_1, L_2, L_3 zusammengesetzt werden, um die gewünschte Legierung L zu erhalten ?

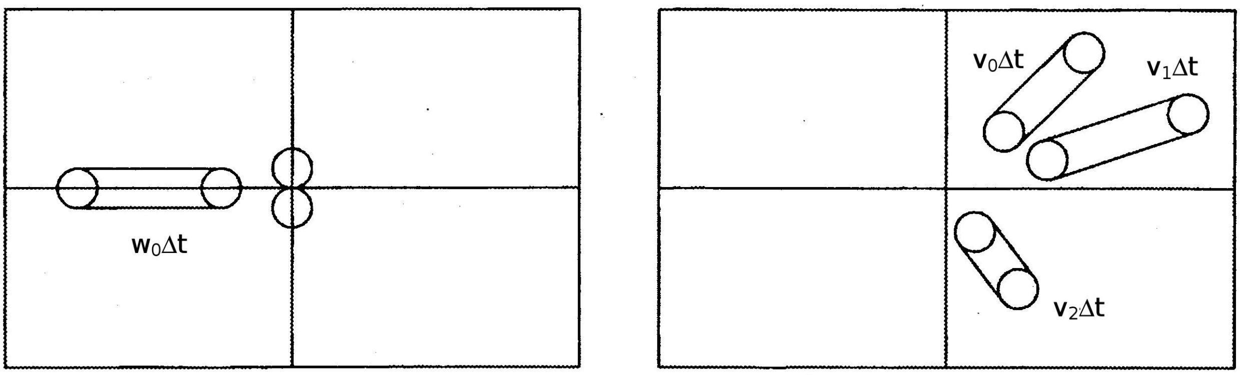
Aufgabe 8 (Impulserhaltungssatz)

Beobachtet werden drei (kleine) Billardkugeln K_0, K_1, K_2 mit den Massen M_0, M_1, M_2 in einem Stoßexperiment in der Ebene. Vor dem Stoß sind die Kugeln K_1 und K_2 in Ruhe und für K_0 wird die Wegstrecke $w_0\,\Delta t$, die die Kugel K_0 in der Zeit t vor dem Stoß zurücklegt, phototechnisch gemessen: Hierbei ist Δt die Verschlußzeit einer Photokamera, d.h. über das gesamte Zeitintervall Δt wird belichtet und wir können aus dem Bild die mit der Geschwindigkeit w_0 in der Zeit Δt zurückgelegte Strecke $w_0\,\Delta t$ ermitteln. Auf die gleiche Art und Weise messen wir die Geschwindigkeiten der Kugeln K_0, K_1 und K_2 nach dem Stoß, indem wir die in der Zeit Δt zurückgelegten Wegstrecken $v_0\,\Delta t, v_1\,\Delta t$ und $v_2\,\Delta t$ messen. Hierbei sind v_1, v_2, v_3 die Geschwindigkeiten der Kugeln K_0, K_1, K_2 nach dem Stoß.

Wegen des Impulserhaltungssatzes gilt:

$$M_0 w_0 = M_0 v_0 + M_1 v_1 + M_2 v_2.$$

Die Masse M_0 sei bekannt und ebenso die Verschlußzeit Δt. Und wir rechnen ohne Reibung. Wie kann man die Massen M_1 und M_2 bestimmen?



(a) Belichtetes Photo vor dem Stoß

(b) nach dem Stoß.

Aufgabe 9 (Interpolation und Methode der kleinsten Quadrate)

(i) Gegeben seien die Meßpunkte $P_1: \; x_1 = 1, y_1 = 4$, $P_2: \; x_2 = 2, y_2 = 6$ und $P_3: \; x_3 = 3, y_3 = 6$. Gesucht ist eine Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph durch die Punkte P_1, P_2, P_3 verläuft.

(ii) Gegeben sei nun ein weiterer Punkt $P_4: \; x_4 = 4, y_4 = 5$; dieser liegt nicht auf dem Graphen, d.h. $f(x_4) \neq y_4$. Finden Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate diejenige Funktion der Form $y = g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, so dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\Phi(a', b', c') = \sum_{i=1}^{4} (g(x_i) - y_i)^2$$

minimal ist.

***-Aufgabe 10** (Ceva-Problem)

Gegeben sei ein Dreieck mit Ecken A, B, C in der Ebene sowie drei Zahlen λ, μ und ν mit $0 < \lambda, \mu, \nu < 1$. Der Punkt T_a teile die Seite $a = BC$ im Verhältnis $\lambda : 1 - \lambda$; der Punkt T_b teile die Seite $b = AC$ im Verhältnis $\mu : 1 - \mu$ und der Punkt T_c teile die Seite $c = AB$ im Verhältnis $\nu : 1 - \nu$. Dann sei G_a bzw. G_b bzw G_c die Gerade durch A und T_a bzw. durch B und T_b bzw. durch C und T_c. Unter welchen Bedingungen an die drei Zahlen λ, μ, ν schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkt M ?