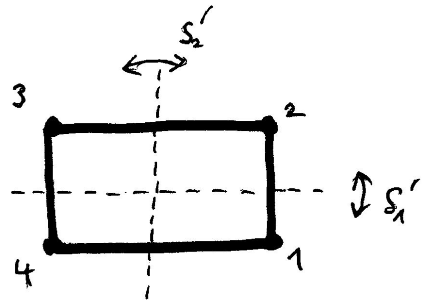
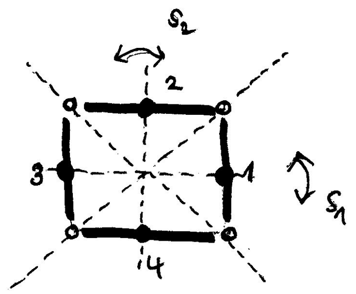
Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 14





Aufgabe 66 (Kleinsche Vierergruppe)

Es gibt eine Gruppe der Ordnung 4, die häufig vorkommt und deshalb einen berühmten Namen trägt.[1] Hier einige Emanationen, deren Isomorphie $V_1 \cong V_2 \cong V_3 \cong V_4 \cong V_5 \cong V_6$:

a) $V_1 := \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^0$.

b) $V_2 := (\mathbb{F}_2)^2 \cong$ additive Gruppe eines 2-dimensionalen Vektorraums über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

c) $V_3 :=$ Symmetriegruppe eines echten Rechtecks (siehe Bild).

c') $V_4 := \langle \sigma_1' = (12)(34), \sigma_2' = (14)(23) \rangle$ als Untergruppe der $\mathfrak{S}_4$.

d) $V_5 := \langle \sigma_1 = (24), \sigma_2 = (13) \rangle$ als Untergruppe der $\mathfrak{S}_4$.

d') $V_6 :=$ Untergruppe der D_4 (Symmetriegruppe des Quadrats), erzeugt von den Spiegelungen an den beiden Diagonalen (siehe Bild).

Aufgabe 67 (Erzeuger in der symmetrischen Gruppe)

In der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ sind, wie wir wissen, die Transpositionen $(i\ j)$ für $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ ein Erzeugendensystem. Zeigen Sie:

(i) Bereits die Transpositionen $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (i\ i+1), \ldots, (n-1\ n)$ bilden ein Erzeugendensystem.

[1] benannt nach Felix Klein (1849 - 1925), Mathematiker, Student in Bonn, Professor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen.

(ii) Sogar die Transpositionen $\tau = (1\ 2)$ und der n-Zykel $\omega = (1\ 2\ \cdots\ n)$ erzeugen die $\mathfrak{S}_n$.

(iii) Eine Permutation σ kann (falls $n > 2$) die $\mathfrak{S}_n$ jedoch nicht erzeugen, denn man zeige ganz allgemein: Die in einer Gruppe G von einem Element g erzeugte Untergruppe $H = \langle g \rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/l$, falls $l = \operatorname{ord}(g) < \infty$ ist, und isomorph zu $\mathbb{Z}$, falls $l = \operatorname{ord}(g) = \infty$ ist.

Aufgabe 68 (Ordnung eines Produkts von Elementen)

Zwei Elemente $a, b \in G$ in einer Gruppe G seien vertauschbar und haben die endlichen Ordnungen m bzw. n. Zeigen Sie, daß die Ordnung von $ab = ba$ ebenfalls endlich ist, und zwar gleich dem $\operatorname{kgV}(m, n)$. Finden Sie Beispiele in den Gruppen $G = \mathbb{Z}/l, \mathfrak{S}_n$ und $GL_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 69 (Quotientenvektorräume)

(i) Es sei V die interne direkte Summe der Untervektorräume U_1 und U_2. Man zeige:

$$V/U_1 \cong U_2 \text{ und genauso } V/U_2 \cong U_1.$$

(ii) Es seien $W \supseteq V \supseteq U$ Vektorräume. Man zeige: V/U ist ein Untervektorraum von W/U und $(W/U)/(V/U) \cong W/V$.

***-Aufgabe 70** (Direkte Summe von Vektorräumen)

Es sei $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$. Man zeige daß $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein Produkte von 4 Mengen ist, nämlich

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Hom}(V_1 \oplus V_2, W_1 \oplus W_2) \cong \operatorname{Hom}(V_1, W_1) \times \operatorname{Hom}(V_2, W_1) \times \operatorname{Hom}(V_1, W_2) \times \operatorname{Hom}(V_2, W_2) \\ f \mapsto (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}). \end{aligned}$$

Wie ist in den 4-fachen Produkt zu multiplizieren, damit Φ ein Isomorphismus ist? (Das sieht man sofort, wenn man $\Phi(f)$ nicht als 4-er Tupel, sondern klugerweise als 2×2-Matrix $\Phi(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ schreibt.)

°15. A flat square box is filled with 16 flat metal squares, numbered in order as shown.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

The last square is removed, making it possible for other squares to move by sliding. Consider any sequence of such moves ending with the lower right corner again vacant. Prove that the permutations possible by such sequences of moves are exactly the even permutations in A_{15}.

Aus: MacLane, Birkhoff: Algebra