Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 13 Abgabetermin : Freitag, 30.1.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

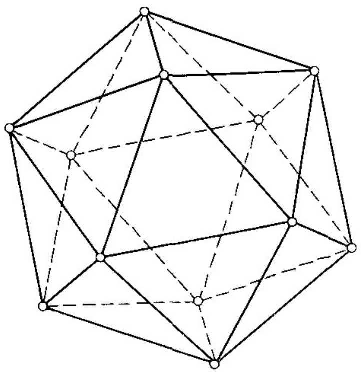

Figure 11.2a

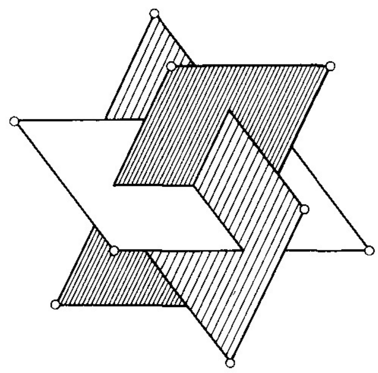

Figure 11.2b

Aus: Coxeter: Introduction to Geometry

Aufgabe 61 (Typ einer Permutation)

Zeigen Sie: Zwei Elemente $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_n$ der n-ten symmetrischen Gruppe sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Typ haben, d.h. $\text{Typ}(\alpha) = \text{Typ}(\beta)$.

Sei $T = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_i \geq 0$ und $1 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + \cdots + n \cdot t_n = n$. Man finde alle Elemente $\pi \in \mathfrak{S}_n$ mit $\text{Typ}(\pi) = T$. Wie viele sind es?

Aufgabe 62 (Untergruppen der $\mathfrak{S}_n$)

Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir folgende Untergruppen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$:

$$S_I = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(i) = i \text{ für alle } i \in I\},$$
$$S_{(I)} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) = I\}.$$

Man zeige:

(i) $S_I \cong \mathfrak{S}_{n-|I|}$

(ii) $S_{(I)} \cong \mathfrak{S}_{|I|} \times \mathfrak{S}_{n-|I|}$.

Aufgabe 63 (Zentrum der $GL_n(\mathbb{K})$)

Diagnonalmatrizen $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ mit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ nennt man *zentrale Matrizen.* Man Zeige:

(i) Das Zentrum $\mathrm{Zen}(GL_n(\mathbb{K}))$ der $GL_n(\mathbb{K})$ besteht genau aus den invertierbaren zentralen Matrizen.

(ii) $\mathrm{Zen}(GL_n(\mathbb{K})) \cong \mathbb{K}^\times$.

Aufgabe 64 (Zerlegung der $GL(V)$)

Es seien U und U' Untervektorräume des Vektorraums V mit $U + U' = V$ und $U \cap U' = 0$. Wir betrachten zwei Untergruppen der $GL(V)$:

$$G_1 = \left\{f \in GL(V) | f(U) = U, f(U') = U'\right\},$$
$$G_2 = \{f \in GL(V) | f(u) = u, \forall u \in U\}.$$

Man zeige:

(i) $G_1 \cong GL(U) \times GL(U')$.

(ii) $G_2 \cong \mathrm{Hom}(U', U) \rtimes GL(U')$.

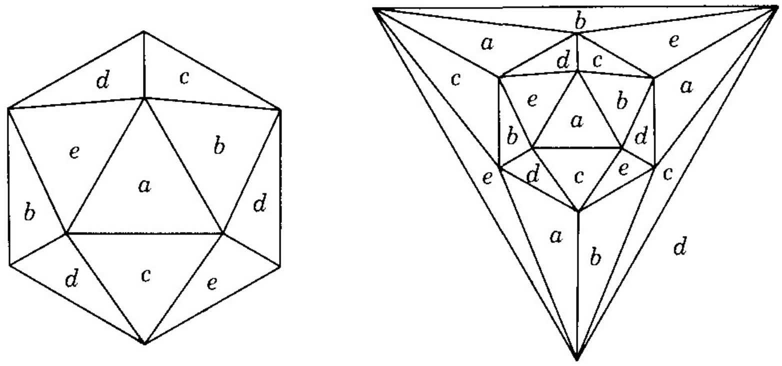

Figure 15.4c

Aus: Coxeter: Introduction to Geometry

***-Aufgabe 65** (Ikosaedergruppe und alternierende Gruppe $\mathcal{A}_5$)

Es sei I das Ikosaeder und es bezeichne $\mathcal{I} = \mathrm{Rot}(I)$ die Gruppe der Rotationen (des $\mathbb{R}^3$), die I in sich abbilden. Dies ist also nur eine Untergruppe der vollen Symmetriegruppe und enthält nicht die Spiegelungen (aber natürlich Produkte mit einer geraden Anzahl von Spiegelungen). Wir wissen, dass $\mathcal{I}$ genau 60 Elemente hat.

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{I}$ zur alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_5$ isomorph ist. Dazu werden wir eine sog. Permutationsdarstellung in eine symmetrische Gruppe konstruieren; wir könnten die Permutationsoperation auf den 6 Diagonalen des Ikosaeders betrachten; aber dann wären wir in der $\mathfrak{S}_6$ anstatt in der $\mathfrak{S}_5$.

(i) Wir stellen uns das Ikosaeder zunächst räumlich vor wie in Figure 11.2a und Figure 15.4c. Die 20 Dreiecke sind in bestimmter Weise in 5 Blöcke á 4 zusammengefasst und alle Dreiecke in einem Block sind mit a (bzw. b, c, d, e) bezeichnet. Wir sprechen vom Block A, B, C, D und E. Die Ecken und Kanten zweier Dreiecke desselben Blocks berühren sich nie.

(ii) Die 4 Dreiecke in einem Block haben folgende Eigenschaft: die 4 Ebenen, in denen sie liegen, schneiden aus dem Raum ein (großes) Tetraeder heraus. Alle 5 Tetraeder haben das Ikosaeder als gemeinsamen Durchschnitt.
(Siehe die Bilder unter `http://en.wikipedia.org/wiki/Compound_of_five_tetrahedra` in dem Artikel `http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedral_symmetry` .)

(iii) Zum besseren Überblick kann man sich das Ikosaeder auch durch 'stereographische Projektion' auf die (gesamte !) Ebene zeichnen, wie in Figure 15.4c rechts. Man projeziere vom Mittelpunkt eines d-Dreiecks auf die Ebene durch das genau gegenüberliegende a-Dreieck (wobei man sich das Ikosaeder am besten zum Ball aufgebläht vorstelle); dabei gerät das Projektionszentrum notwendigerweise 'nach Unendlich' und das anfangs gewählte d-Dreieck ist zu dem unbeschränkten Teil der Ebene geworden, der die anderen beschränkten Teile umgibt.

(iv) Nun sei $g \in \mathcal{I}$ eine Rotation. Die 5 Blöcke A, B, C, D und E werden immer als ganze Blöcke vertauscht: wird z.B. ein a-Dreieck durch g in ein b-Dreieck abgebildet, so wird jedes andere a-Dreieck auch in ein b-Dreieck abgebildet. Wir haben also eine Zuordnung

$$P : \mathcal{I} = \mathrm{Rot}(I) \to \mathrm{Sym}(A, B, C, D, E), g \mapsto P_g.$$

P ist offensichtlich ein Homomorphismus und wir wollen zeigen:

(I) P ist injektiv.

(II) Das Bild $\mathrm{im}(P)$ ist die $\mathfrak{A}_5$.

(v) Man beweise (I) durch ein einfaches geometrisches Argument.

(vi) Für (II) finden Sie zu folgenden Rotationen g die Permutation P_g :

1) eine der 6 Rotationen der Ordnung 5 um eine Achse durch zwei antipodische Ecken.

2) eine der 15 Rotationen der Ordnung 2 um eine Achse durch zwei antipodische Kantenmittelpunkte.

3) eine der 10 Rotationen der Ordnung 3 um eine Achse durch zwei antipodische Dreiecksmittelpunkte.

Zeigen Sie, dass diese Permutationen P_g in der alternierenden Untergruppe liegen. Weil es (die Identität mitgezählt) 60 verschiedene Permutationen sind, ist damit (II) gezeigt.