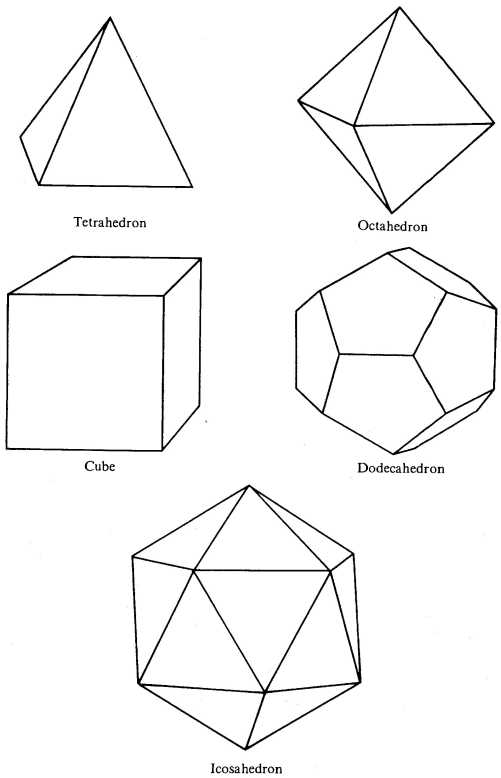
Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 12 Abgabetermin : Freitag, 23.1.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Die Platonischen Körper

Aufgabe 56 (Ähnliche Matrizen)

Wir wissen: Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ für einen Körper $\mathbb{K}$ sind genau dann äquivalent, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ gilt. Die Ähnlichkeit von quadratischen Matrizen ist eine schärfere Äquivalenzrelation. Zeigen Sie:

(i) Ist $CAC^{-1} = B$, so gilt $C^{-1}\mathrm{Fix}(B) = \mathrm{Fix}(A)$ für die Fixpunkträume; finden Sie zwei Matrizen mit gleichen Rang, aber Fixpunkträumen verschiedener Dimension.

(ii) Ist $CAC^{-1} = B$, so gilt $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(B)$.

(Hier bedeutet die *Ordnung* einer invertierbaren Matrix A die kleinste natürliche Zahl $s \geq 1$ mit $A^s = \mathbb{1}$, wenn es ein solches s gibt, und es bedeutet ∞, wenn es kein solches s gibt.)

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Finden Sie zu jedem $s = 1, 2, \ldots, \infty$ eine invertierbare Matrix A mit $\mathrm{ord}(A) = s$.

Aufgabe 57 (Zeilenrang gleich Spaltenrang)

Wir hatten den Rang einer Matrix A ursprünglich mit Hilfe des Gauß-Algorithmus definiert; wir nennen diese Zahl hier den *Zeilenrang* $\mathrm{zrg}(A)$. Nun definieren wir den *Spaltenrang* $\mathrm{srg}(A)$ entsprechend als die Anzahl der Pivotelemente, wenn man im Gauß-Algorithmus ausschließlich Spaltenumformungen vornimmt.

Zeigen Sie: $\mathrm{zrg}(A) = \mathrm{srg}(A)$.

Aufgabe 58 (Symmetrische Matrizen)

Es sei M eine symmetrische $n \times n$-Matrix, also $M = M^\top$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix Z, so daß

$$ZMZ^\top = D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = \begin{pmatrix} \lambda_{\mathbb{1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit einer Diagonalmatrix $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$ und $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ mit $r = \mathrm{rg}(M)$ ist.

Aufgabe 59 (Rangformeln)

Es seien endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1, V_2, V_3, V_4 und lineare Abbildungen f, g, h

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{h} V_4$$

gegeben. Man zeige

$$\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leq \mathrm{rg}(h \circ g \circ f) + \mathrm{rg}(g)$$

und leite daraus unsere frühere Abschätzung

$$\mathrm{rg}(\varphi \circ \psi) \leq \min\{\mathrm{rg}(\varphi), \mathrm{rg}(\psi)\}$$

für die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen φ, ψ her.

(Hinweis: Gehen Sie von der Überlegung aus, dass man eine Basis von $\mathrm{im}(g \circ f)$ zu einer Basis von $\mathrm{im}(g)$ ergänzen kann.)

***-Aufgabe 60** (Verschieben und Differenzieren)

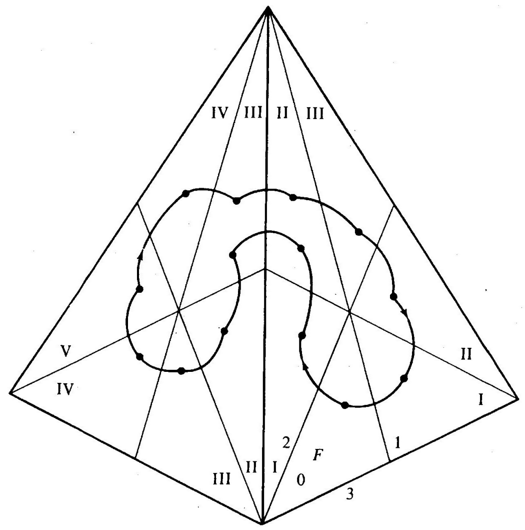
Es sei $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad n. Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V, & T(f)(x) &:= f(x+1) \\ D : V &\longrightarrow V, & D(f) &:= f'. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) Beide Abbildungen sind linear und vertauschen, d.h. $DT = TD$.

(ii) Bzgl. der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ der Stammpolynome ist die Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(D)$ eine einfache Bandmatrix, wegen $D(X^k) = kx^{k-1}$. Wie sieht die Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$ aus? Für T finde man eine neue Basis $\mathcal{A} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ mit $T(f_0) = f_0$ und $T(f_k) = f_{k-1} + f_k$ für $k = 1, \ldots, n$.



Suppose that $\mathscr{G} = \mathscr{A}_3 = \mathscr{W}\,]\,\mathscr{T}$, the group of all symmetries of a tetrahedron. Then

$$S_i^2 = (S_1S_2)^3 = (S_1S_3)^2 = (S_2S_3)^3 = 1.$$

The following relation holds in $\mathscr{G}$:

$$W = S_2S_1S_3S_1S_2S_1S_2S_1S_2S_3S_2S_1S_2S_1 = 1.$$

The corresponding closed path on the surface of the tetrahedron is shown in Figure 6.1. It is clear from the Roman numerals in the figure that 5 is the maximal length for partial words of W, and that there is just one partial word of length 5, viz. $S_2S_1S_3S_1S_2S_1S_2$. As in the proof of Theorem 6.1.4 we write $W = W_1S_2S_1W_2$ with $W_1 = S_2S_1S_3S_1S_2S_1$ and $W_2 = S_2S_3S_2S_1S_2S_1$. Applying the relation $(S_1S_2)^3 = 1$, we replace S_2S_1 by $S_1S_2S_1S_2$, thereby replacing $W = 1$ by the relation

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= W_1S_1S_2S_1S_2W_2 \\ &= S_2S_1S_3S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_2S_2S_3S_2S_1S_2S_1 \end{aligned}$$

The path corresponding to $W^{(1)}$ is shown in Figure 6.2(a).

(iii) Es gibt $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{R}$ mit

$$T = \tau_0 \mathrm{id} + \tau_1 D + \tau_2 D^2 + \ldots + \tau_n D^n.$$

(iv) Es gilt $(T - \mathrm{id})^{n+1} = 0$ und $D = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(T - \mathrm{id})^k$.

Aus: Grove-Benson: Finite Reflection Groups